Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Notăm cu r rația progresiei aritmetice. $a_3 = 11,\ a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_1 + 2r = 11.\ a_{10} = 32,\ a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_1 + 9r = 32$. $7r = 21 \Rightarrow r = 3$. $a_1 + 2r = 11 \Rightarrow a_1 + 2 \cdot 3 = 11 \Rightarrow a_1 = 5$.	 **2p** **1p** **2p**
2.	$A(a+1, 7a) \in \mathcal{G}_f \Leftrightarrow f(a+1) = 7a \Leftrightarrow -2(a+1) + 11 = 7a$. $-2a + 9 = 7a \Leftrightarrow 9a = 9 \Leftrightarrow a = 1$.	**3p** **2p**
3.	$\begin{cases} x + 19 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -19 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, \infty)$. $\log_5 \frac{x+19}{2x} = \log_5 10$, de unde obținem $\frac{x+19}{2x} = 10$. $x + 19 = 20 \cdot x \Leftrightarrow 19x = 19 \Leftrightarrow x = 1.\quad 1 \in (0, \infty) \Rightarrow S = \{1\}$.	**1p** **3p** **1p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de 2 cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile. Cifra unităților, fiind pară, se poate alege în 5 moduri. Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor, fiind pară și nenulă, se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma 5·4=20 de numere naturale de 2 cifre , cu ambele cifre pare. Numărul cazurilor favorabile este egal cu 20. $p = \frac{nr.cazurilor\ favorabile}{nr.cazurilor\ posibile} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$.	**2p** **2p** **1p**
5.	$M(a,b)$ este mijlocul segmentului $AB \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x_A + x_B}{2} \\ b = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-2+6}{2} \\ b = \frac{5+7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}$. $OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.	**2p** **3p**
6.	$\Delta ABC : m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + m(\sphericalangle B) + 90^\circ = 180^\circ$ $\Rightarrow m(\sphericalangle B) = 30^\circ$. $\sin B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{20} \Rightarrow AC = 10$. $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 10\sqrt{3}.\ \mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$.	 **2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1)=\begin{pmatrix}1+5\cdot(-1) & 10\cdot(-1)\\ -2\cdot(-1) & 1-4\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -10\\ 2 & 5\end{pmatrix}$	**1p**
	$detA(-1)=\begin{vmatrix}-4 & -10\\ 2 & 5\end{vmatrix}=(-4)\cdot 5-(-10)\cdot 2$	**2p**
	Finalizarea calculului $detA(-1)=0$	**2p**
b)	$A(m)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}1+5m & 10m\\ -2m & 1-4m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -10\\ 2 & 5\end{pmatrix}=$	**1p**
	$=\begin{pmatrix}(-4)\cdot(1+5m)+10m\cdot 2 & (-10)\cdot(1+5m)+10m\cdot 5\\ (-2m)\cdot(-4)+(1-4m)\cdot 2 & (-2m)\cdot(-10)+(1-4m)\cdot 5\end{pmatrix}=$	**2p**
	Finalizarea calculului: $\begin{pmatrix}-4 & -10\\ 2 & 5\end{pmatrix}=A(-1),(\forall)m\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$detB=det[A(-10)\cdot A(-9)\cdots A(9)\cdot A(10)]=$	
	$detA(-10)\cdot detA(-9)\cdots detA(9)\cdot detA(10)=$	**2p**
	$detA(-10)\cdot detA(-9)\cdots detA(-1)\cdots detA(9)\cdot detA(10)=0$, deoarece $detA(-1)=0$.	**3p**
	Sau	
	Folosind $A(m)\cdot A(-1)=A(-1),(\forall)m\in\mathbb{R}$	
	Verificarea relației: $A(-1)\cdot A(m)=A(-1),(\forall)m\in\mathbb{R}$	**2p**
	Efectuarea calcului: $B=A(-10)\cdot A(-9)\cdots A(9)\cdot A(10)=$	
	$A(-10)\cdot A(-9)\cdots A(-1)\cdots A(9)\cdot A(10)=A(-1)$.	**2p**
	$detB=det[A(-10)\cdot A(-9)\cdots A(9)\cdot A(10)]=detA(-1)=0$.	**1p**
2.a)	$\left(-\frac{1}{5}\right)*5=-\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 5+5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+5\cdot 5-20=$	**3p**
	$=1-1+25-20=5$	**2p**
b)	$(\exists)e\in\mathbb{R}$ astfel încât $(\forall)x\in\mathbb{R}$, $x*e=e*x=x$	**1p**
	$x*e=x,(\forall)x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -xe+5x+5e-20=x,(\forall)x\in\mathbb{R}$	
	$\Leftrightarrow (x-5)(4-e)=0,(\forall)x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e=4$	**3p**
	Verificarea relației: $4*x=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$	**1p**
c)	$\frac{1}{n}*n<n\Leftrightarrow -\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{1}+5\cdot\frac{1}{n}+5\cdot n-20<n\Leftrightarrow -1+\frac{5}{n}+5n-20-n<0$	**2p**
	$\Leftrightarrow 4n^2-21n+5<0$	
	$\Delta=361$; $n_1=\frac{1}{4}$ și $n_2=5\Rightarrow n\in\left(\frac{1}{4},5\right)$	**2p**
	$n\in\left(\frac{1}{4},5\right)\cap\mathbb{N}^*\Rightarrow S=\{1,2,3,4\}$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x-3)-(x^2+2x-3)\cdot 1}{(x-3)^2}$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2-6x+2x-6-x^2-2x+3}{(x-3)^2}=\dfrac{x^2-6x-3}{(x-3)^2}$, $x\in(3,\infty)$.	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x(x-3)}=1\Rightarrow m=1\in\mathbb{R}^*$. $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x-3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-3}{x-3}=5\Rightarrow n=5\in\mathbb{R}$.	**3p**
	Dreapta de ecuație y=x+5 este asimptotă oblică spre +∞ la graficul funcției f.	**2p**
c)	$f''(x)=\left(\dfrac{x^2-6x-3}{(x-3)^2}\right)'=\dfrac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x-3)\cdot 2\cdot(x-3)}{(x-3)^4}=\dfrac{24}{(x-3)^3}$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(3,\infty)$, de unde obținem că f este convexă pe $(3,\infty)$.	**2p**
2.a)	$\int_1^e\left(f(x)-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_1^e\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_1^e\dfrac{1}{x}dx$	**2p**
	$=ln\lvert x\rvert\Big\vert_1^e=lne-ln1=1$	**3p**
b)	F se obține din operații cu funcții derivabile pe $(0,+\infty)$, deci F este derivabilă pe $(0,+\infty)$.	**1p**
	$F'(x)=(\ln(x^2+x)-ln2)'=\dfrac{2x+1}{x^2+x}-0=$	**2p**
	$=\dfrac{2x+1}{x^2+x}=\dfrac{x+x+1}{x(x+1)}=\dfrac{x}{x(x+1)}+\dfrac{x+1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}=f(x)$,	**1p**
	F este derivabilă pe $(0,\infty)$ și $F'(x)=f(x),\forall x\epsilon(0,\infty)$. Deci F este o primitivă a funcției f.	**1p**
c)	Fie $G:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f\Rightarrow G$ este derivabilă pe $(0,\infty)$ și $G'(x)=f(x)$, $(\forall)x\epsilon(0,\infty)$.	**1p**
	Deoarece $x>0$, rezultă că $\frac{1}{x}>0$ și $\frac{1}{x+1}>0$, adică $f(x)>0,(\forall)x\epsilon(0,\infty)$.	**2p**
	$G'(x)=f(x)>0,(\forall)x\epsilon(0,\infty)\Rightarrow G$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.	**2p**