

Examenul național de bacalaureat 2023

Simulare județeană

Proba Ec)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

• **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**

• **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Dacă $z^2 + z + 1 = 0$, unde z este număr complex, arătați că $z^{2023} + \frac{1}{z^{2023}} = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{2023x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .
Arătați că $f\left(x + \frac{1}{2023}\right) = f(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, aceasta să nu conțină cifra 2.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $A(1, 2)$, $B(4, 5)$ și $D(-3, 2)$.
Determinați ecuația dreptei MN , știind că segmentul MN este linie mijlocie a trapezului $ABCD$.
- 5p** 6. Știind că $\operatorname{tga} = \sqrt{3}$ și $a \in \mathbb{R}$, arătați că $\frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} = 2 - \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II- lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.
- 5p** a) Determinați $\det(A(10))$.
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui x , știind că $A(x) \cdot A(2x) = A(x^2 + 2)$.
- 5p** c) Știind că $A(n) = A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2022)$, demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2023.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție:
 $x * y = 3xy - 3x - 3y + 4$. Legea „*” este asociativă și are element neutru.
- 5p** a) Arătați că $x * y = 3(x - 1)(y - 1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Calculați $\frac{1}{1011} * \frac{2}{1011} * \frac{3}{1011} * \dots * \frac{2023}{1011}$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricile lor față de legea „*”.

SUBIECTUL al III- lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$.
- 5p** a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .
- 5p** b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f .
- 5p** c) Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = f(a_n)$, pentru $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Studiați convergența șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ și în caz de convergență, calculați limita șirului.
2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
- 5p** a) Arătați că funcția F este convexă pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Determinați primitiva G a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$ cu proprietatea că graficul lui G conține punctul $A(1, -\frac{1}{2})$.
- 5p** c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2)}{x^4}$.