BAREM ORIENTATIV DE EVALUARE
Simularea examenului de bacalaureat național 2022
Proba E. c) Matematică M_șt.-naturii

Simulare județeană

Filiera teoretică: profilul real, specializarea științele naturii .
Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.

Subiectul I **(30 puncte)**

1.	Din $a_{20}+a_{22}=a_1+19r+a_1+21r=2a_1+40r$ se obține $2a_1+40r=2022 \Leftrightarrow a_1+20r=1011$	**3p**
	$a_{21}=a_1+20r=1011$.	**2p**
	Sau $a_{21}=\frac{a_{20}+a_{22}}{2}=\frac{2022}{2}=1011$.	**5p**
2.	Trebuie $\Delta=0$	**1p**
	$\Delta=m^2-8m+12$	**2p**
	Din $m^2-8m+12=0$ se obține $m_1=2, m_2=6$.	**2p**
3.	$3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9=0 \Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^x+9=0$	**2p**
	$3^x=t>0 \Rightarrow 3t^2-28t+9=0$	**1p**
	$t_1=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^x=\frac{1}{3}$, de unde $x=-1$	**1p**
	$t_2=9\Rightarrow 3^x=9$, de unde $x=2$.	**1p**
4.	Probabilitatea $P=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$	**1p**
	$n(\Omega)=2022$	**1p**
	$A=\{\lg 1, \lg 10, \lg 100, \lg 1000\}\Rightarrow n(A)=4$	**2p**
	Se obține $P=\frac{4}{2022}=\frac{2}{1011}$.	**1p**
5.	$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$	**3p**
	$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$	**1p**
	Se obține: $a=\frac{5}{6}, b=\frac{1}{6}$.	**1p**
	Sau utilizând teorema punctului care împarte un segment într-un raport dat $\frac{BM}{MC}=k=\frac{1}{5}$: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$, pentru $k=\frac{1}{5}$, de unde $a=\frac{5}{6}, b=\frac{1}{6}$.	**5p**
6.	Din $\sin^2 x+\cos^2 x=1, \forall x\in\mathbb{R}$, $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ și $\cos x=-\frac{1}{4}$ se obține	**1p**
	$\sin x=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$	**2p**
	Avem $sin2x=2\cdot sinx\cdot cosx=$	**1p**
	$=2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{8}$	**1p**

Subiectul II **(30 puncte)**

1. a)	Matricea $A(m)$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det\left(A(m)\right) \neq 0$	1p
	$\det\left(A(m)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2$	2p
	Din $1 - m^2 \neq 0$ se obține $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.	2p
b)	$A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	1p
	$A(-1)^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A(-1)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	2p
	Se obține $A(-1)^3 = 3A(-1)^2 - 2A(-1)$.	2p
c)	$\det\left(A(-1) - xI_3\right) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$	2p
	Calcul: $\det\left(A(-1) - xI_3\right) = -x^3 + 3x^2 - 2x = x(1-x)(x-2)$	2p
	Se obțin soluțiile reale: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$.	1p
2. a)	Calcul direct: $4(x+3)(y+3) - 3 = 4(xy + 3x + 3y + 9) - 3 = 4xy + 12x + 12y + 33 = x \circ y,\ x, y \in G$ **sau** $x \circ y = 4xy + 12x + 12y + 33 = 4(xy + 3x + 3y + 9) - 3 = 4(x+3)(y+3) - 3$.	5p
b)	Element neutru: $\exists e \in G$ *a.î.* $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G$. Se obţine $e = -\frac{11}{4} \in G$.	1p 1p
	Elemente simetrizabile: pentru $x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ *a.î.* $x \circ x' = x' \circ x = -\frac{11}{4}$, se obţine $x' = \frac{-48x - 143}{4(4x+12)} = -3 + \frac{1}{16(x+3)} > -3, \forall x \in (-3, \infty)$	1p 1p
	Mulțimea elementelor simetrizabile este $G = (-3, \infty)$.	1p
c)	Avem $x \circ x = (x+3)^2 - 3$ şi $x \circ x \circ x = (x \circ x) \circ x = 16(x+3)^3 - 3$	1p 1p
	$16(x+3)^3 - 3 = 29 \Leftrightarrow (x+3)^3 = 2$	2p
	$x + 3 = \sqrt[3]{2}$. Deci $x = -3 + \sqrt[3]{2}$.	1p

Subiectul III **(30 puncte)**

1. a)	$f'(x)=\frac{2e^x(x^2-3)'-2e^x(x^2-3)}{4e^{2x}}=\frac{2e^x(-x^2+2x+3)}{4e^{2x}}=\frac{-x^2+2x+3}{2e^x},\ \forall x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f(x)+f'(x)=\frac{x^2-3}{2e^x}+\frac{-x^2+2x+3}{2e^x}=\frac{x}{e^x}=xe^{-x},\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**2p**
b)	Avem $f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{2e^x},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+2x+3=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=3$ Din tabelul cu semnul primei derivate se obține $A(-1,-e)$ este punct minim, iar $B\left(3,\frac{3}{e^3}\right)$ este punct maxim local.	**2p**
	Avem $f(x)>-e>-3,\forall x\in\mathbb{R}$.	**1p**
c)	$f''(x)=\left(\frac{-x^2+2x+3}{2e^x}\right)'=\frac{2e^x(-2x+2)-2e^x(-x^2+2x+3)}{4e^{2x}}=\frac{x^2-4x-1}{2e^x},\forall x\in\mathbb{R}$ $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x-1=0$, de unde se obțin $x_1=2-\sqrt{5},\ x_2=2+\sqrt{5}$	**2p**
	Tabel cu semnul derivatei a doua, de unde *f* este convexă pentru $x\in\left(-\infty,2-\sqrt{5}\right)\cup\left(2+\sqrt{5},\infty\right)$ și *f* este concavă pentru $x\in\left(2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}\right)$	**2p**
	Cele două puncte de inflexiune sunt $\left(2-\sqrt{5},\ f(2-\sqrt{5})\right)$ și $\left(2+\sqrt{5},\ f(2+\sqrt{5})\right)$.	**1p**
2. a)	Funcția $G:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ G(x)=\frac{\ln^2 x}{2}$ este derivabilă și $G'(x)=\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)'=\frac{1}{2}(\ln^2 x)'=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}(\ln^2 x)'=\frac{\ln x}{x}=g(x),\ \forall x\in(0,\infty)$. **Sau** $G(x)=\int g(x)dx=\int\frac{f(x)}{x^2+2x}dx=\int\frac{(x+2)\ln x}{x(x+2)}dx=$ $=\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x\,(\ln x)'\,dx=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.	**3p** **2p** **3p**
b)	$\int_1^e\left(f(x)-2\ln x\right)dx=\int_1^e\left((x+2)\ln x-2\ln x\right)dx=\int_1^e x\ln x\,dx=$	**2p**
	$=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=$	**2p**
	$\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$.	**1p**
c)	Fie F o primitivă a funcției *f*. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\int_1^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)-F(1)}{x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F'(x)}{3x^2}$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)\ln x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$	**2p**
	$=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.	**1p**