INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c) Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE SI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele**
- **punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	Din ipoteză obţinem $q^2=4$ şi apoi $q=2$.	**2p**
	Apoi obţinem $b_1=3$.	**1p**
	Rezultă $b_1+b_2+...+b_9=b_1\cdot\dfrac{q^9-1}{q-1}=1533$.	**2p**
2.	Avem $\Delta=(2m+1)^2-4\left(m^2+m\right)$	**2p**
	$=1>0$, deci ecuaţia admite rădăcini reale distincte.	**3p**
3.	Folosim notaţia $4^x=t$. Ecuaţia devine $4t^2-5t+1=0$.	**1p**
	Obţinem soluţiile $t_1=1$ şi $t_2=\dfrac{1}{4}$.	**2p**
	La final avem $x_1=0$ şi $x_2=-1$.	**2p**
4.	Avem $T_{k+1}=C_{30}^k\left(x^2\right)^{30-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k=C_{30}^k x^{60-3k}$;	**2p**
	Cerinţa conduce la $60-3k=0$, de unde $k=20$;	**2p**
	Este vorba de T_{21}.	**1p**
5.	Din regula triunghiului avem $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ şi $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.	**3p**
	Concluzia se obţine prin însumarea acestor relaţii.	**2p**
6.	Avem $m(\sphericalangle C)=30^0$.	**1p**
	Teorema sinusurilor ne conduce la $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$, de unde $\dfrac{AB}{1/2}=\dfrac{BC}{\sqrt{2}/2}$;	**3p**
	Obţinem $BC=3\sqrt{6}$.	**1p**

SUBIECTUL II **(30 puncte)**

1. a)	Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Avem $AX=\begin{pmatrix}a+6c & b+6d\\ c & d\end{pmatrix}$ şi $XA=\begin{pmatrix}a & 6a+b\\ c & 6c+d\end{pmatrix}$;	**2p**
	Egalitatea $AX=XA$ conduce la $c=0$ şi $d=a$, de unde $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$.	**3p**
1. b)	Avem $AB=B^nB=B^{n+1}$ şi $BA=BB^n=B^{n+1}$;	**4p**
	Deducem că $B\in G$.	**1p**
1. c)	Din b) avem $C\in G$, iar din punctul a), obţinem că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $C=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$;	**2p**
	Prin calcul avem $C^3=\begin{pmatrix}a^3 & 3a^2b\\ 0 & a^3\end{pmatrix}$, de unde $a^3=1$ şi $3a^2b=6$, deci $a=1$ şi $b=2$;	**2p**
	Obţinem $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.	**1p**

2. a)	Dacă notăm cu e elementul neutru, atunci avem $x \circ e = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; Obţinem $e = 7$; Se verifică apoi $7 \circ x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.	**1p** **3p** **1p**
2. b)	Pentru $n = 2$ se verifică uşor relaţia $x \circ x = (x-6)^2 + 6$; Pentru $n = k$ presupunem adevărată relaţia $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{k \text{ ori de } x} = (x-6)^k + 6$, iar pentru $n = k+1$, demonstrăm relaţia $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{(k+1) \text{ ori de } x} = (x-6)^{k+1} + 6$; Avem $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{k+1 \text{ ori de } x} = \underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{k \text{ ori de } x} \circ x = \left(\left(x-6\right)^k + 6\right)x - 6\left(\left(x-6\right)^k + 6\right) - 6x + 42 = (x-6)^{k+1} + 6$.	**1p** **1p** **3p**
2. c)	Din punctul anterior avem $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{8 \text{ ori de } x} = (x-6)^8 + 6$; Obţinem ecuaţia $(x-6)^8 + 6 = 262$, adică $(x-6)^8 = 256 = 2^8$, de unde $x - 6 = \pm 2$; Avem soluţiile $x_1 = 4$ şi $x_2 = 8$.	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL III **(30 puncte)**

1. a)	Avem $f'(x) = 2x\left(e^{x^2} - 1\right)$ Unica soluţie este $x = 0$.	**3p** **2p**
1. b)	Tabelul de variaţie arată că $x = 0$ e punct de minim Se obţine $\operatorname{Im} f = [1, \infty)$.	**3p** **2p**
1. c)	Punctul precedent conduce la $f(x) > 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. Din $f\left(\frac{1}{2}\right) > 1$ obţinem $e^{\frac{1}{4}} > \frac{5}{4}$. Analog $e^{\frac{1}{9}} > \frac{10}{9}$ şi apoi concluzia se obţine prin înmulţire	**1p** **4p**
2. a)	**a)** se demonstrează egalitatea $g'(x) = f(x)$. Se obţine concluzia	**4p** **1p**
2. b)	Metoda integrării prin părţi conduce la $\int_1^{\pi/2} f(x) \ln x \, dx = g(x) \ln x \Big\vert_1^{\pi/2} - \int_1^{\pi/2} g(x) \frac{1}{x} dx$ $= -\int_1^{\pi/2} \cos dx = \sin x \Big\vert_1^{\pi/2} = 1 - \sin 1$.	**2p** **3p**
2. c)	$\int_1^{\sqrt{\pi/2}} x f\left(x^2\right) \ln x dx = \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{\pi/2}} 2x f\left(x^2\right) \ln\left(x^2\right) dx$. Schimbarea de variabilă $x^2 = t$ conduce la integrale precedentă, deci rezultatul este $\frac{1}{4}(1 - \sin 1)$	**2p** **3p**