

**Simulare, Bacalaureat, 28 ianuarie 2022
Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

1.	$z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ $a + bi - 2(a - bi) = 1 + 3i$ $-a + 3bi = 1 + 3i \Rightarrow a = -1, b = 1$ $z = -1 + i$	2p 2p 1p
2.	$\Delta < 0$ $\Delta = (m-1)^2 - 4(m-1) = m^2 - 6m + 5$ $m^2 - 6m + 5 < 0 \Rightarrow m \in (1, 5)$	1p 2p 2p
3.	$1 + 3x \geq 0, 1 - x \geq 0$, domeniul de existență $x \in [-\frac{1}{3}, 1]$ $1 + 3x = (1 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5$ $x_1 = 0$ este soluție	2p 2p 1p
4.	Dacă $f(1) = 0$ putem alege valorile $f(2)$ și $f(3)$ în 4^2 moduri. Dacă $f(1) = 2$ putem alege valorile $f(2)$ și $f(3)$ în 4^2 moduri. Sunt $2 \cdot 4^2 = 32$ funcții cu proprietatea cerută.	2p 2p 1p
5.	Dacă $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PD}$, atunci $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$. Dar $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, deci $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.	2p 3p
6.	Avem $\sin 2a - \sin 2b = 2 \sin(a - b) \cdot \cos(a + b)$ $\sin(a - b) \cdot [2 \cos(a + b) - 1] = \sin(a - b) \cdot (2 \cos \frac{\pi}{3} - 1) = \sin(a - b) \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} - 1) = 0$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

<p>1. a)</p>	$A(1) + A(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $= 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot A(0).$	<p>3p 2p</p>
<p>b)</p>	$A(x) + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\Rightarrow \det(A(x) + I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$	<p>2p 3p</p>
<p>c)</p>	$aI_3 - b \cdot A(-1) + c \cdot A(-1) \cdot A(-1) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ $\det(aI_3 - b \cdot A(-1) + c \cdot A(-1) \cdot A(-1)) = \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} =$ $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) =$ $= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$ <p>pentru orice numere reale pozitive a, b, c.</p>	<p>2p 2p 1p</p>
<p>2. a)</p>	$x * y = -xy + 2x + 2y - 4 + 2 =$ $= -x(y - 2) + 2(y - 2) + 2 = \quad ,$ $= 2 - (x - 2)(y - 2)$ <p>pentru orice numere reale x și y.</p>	<p>1p 2p 2p</p>
<p>b)</p>	$x * x = 2 - (x - 2)^2 \Rightarrow$ $x * x * x * x = [2 - (x - 2)^2] * [2 - (x - 2)^2] =$ $= 2 - (x - 2)^4 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ sau } x = 3.$	<p>1p 2p 2p</p>
<p>c)</p>	<p>Deoarece $m * n * p = 2 + (m - 2)(n - 2)(p - 2)$ se obține $(m - 2)(n - 2)(p - 2) = 0$, $m = 2$ sau $n = 2$ sau $p = 2$, deci produsul $m \cdot n \cdot p$ este divizibil cu 2.</p>	<p>2p 2p 1p</p>

SUBIECTUL al III-lea
(30 puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{x'\sqrt{x^2+2x+2} - x(\sqrt{x^2+2x+2})'}{x^2+2x+2} =$ $= \frac{\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2} =$ $= \frac{x+2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}, x \in \mathbb{R}$	2p 2p 1p
b)	$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{2x} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2+2x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2x-2}{x^2+2x+2} \right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}} \right]^{\frac{(-2x-2)x}{x^2+2x+2}} =$ $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$	3p 2p
c)	<p>Considerăm o funcție $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - a$ continuă și derivabilă pe \mathbb{R} și $g'(x) = f'(x)$ pentru orice x real,</p> <p>g este strict descrescătoare pe $(-\infty, -2)$ și strict crescătoare pe $(-2, +\infty)$</p> <p>Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1 - a > 0$, $g(-2) = -\sqrt{2} - a < 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1 - a > 0$ pentru orice $a \in (-\sqrt{2}, -1)$,</p> <p>ecuația $f(x) = a$ are exact două soluții reale distincte.</p>	2p 2p 1p
2. a)	$\int (x^2+1) \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} dx = \int (x^2+2x+1) dx = \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int 1 dx =$ $= \frac{x^3}{3} + x^2 + x + c$ <p style="text-align: right;">, unde $c \in \mathbb{R}$</p>	3p 2p
b)	$G(x) = \int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} dx = \int 1 dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx = x + \ln(x^2+1) + c, c \text{ este real}$ $G(1) = 1 + \ln 2 + k = \ln 2, \text{ unde } k \in \mathbb{R} \Rightarrow k = -1$ $G(x) = x + \ln(x^2+1) - 1.$	2p 2p 1p
c)	$f(x) = t, \quad \int e^t dt = e^t + c \Rightarrow$ $f'(x) dx = dt \Rightarrow \int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c, \text{ unde } c \in \mathbb{R}.$	3p 2p