Simulare, Bacalaureat, 28 ianuarie 2022
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $A = z(2+3i) + \overline{z}(2-3i)$ este real pentru orice număr complex z, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, a^2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = 4x-4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(1-x) - \lg(7-x) = -1$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M = \{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui M care au cel puțin trei elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$ și $H(3,2)$. Știind că H este ortocentrul triunghiului ABC, determinați panta dreptei BC.

5p **6.** Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\sin x \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x)\cos x = -1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1,1)) = 1$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $A, B \in M$, atunci $A + B \in M$.

5p **c)** Arătați că $\det(I_2 - A(0,b)) \neq 0$, oricare ar fi $b \in \mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x \circ y = 4xy - 4x - 4y + 5$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 4(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $N = 2021 \circ 2022$ este pătratul unui număr natural.

5p **c)** Determinați numerele naturale a și b pentru care $a \circ b = 13$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x) = x - e\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{x-e}{x}, \quad x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că graficul funcției f nu admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y = x$.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $e^x - x^e = 0$ are exact o soluție reală în intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţiile $f, F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\dfrac{x-1}{x}$ şi $F(x)=e^x+x-\ln x$.

5p **a)** Demonstrați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int x\left(F(x)-x+\ln x\right)dx$.

5p **c)** Determinați primitiva $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, al cărei grafic conține punctul $A(1,e+2)$.