Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $N=\log_2 24-\log_2 12+3$ este pătratul unui număr natural.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A\left(a,a^2\right)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x-2}=x-2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1!, 2!, 3!, ..., 10!\}$, acesta să fie divizibil cu 9.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctul D mijlocul segmentului BC. Arătați că, pentru orice puncte E și F astfel încât $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FD}$, are loc relația $2\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Arătați că $(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-1)\right)=3$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=A(2)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x\circ y=xy-\sqrt{2}(x+y-1)+2$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x-\sqrt{2}\right)\circ\left(x+\sqrt{2}\right)=x$.

5p **c)** Determinați numerele raționale al căror simetric în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr rațional.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x\left(1-\frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right)\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul natural nenul n, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A\left(n,f(n)\right)$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=\frac{1}{5}x+1$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2\ln x}{x^3}$ și funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$, o primitivă a lui f.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e x^2\left(f(x)+\dfrac{2\ln x}{x^3}\right)dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=-\dfrac{5\ln 2}{128}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x\cdot F(x)\,dx=\dfrac{a^2-1}{2}$.