

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

**SUBIECTUL I****(30 puncte)**

- 5p** 1. Fie progresia geometrică cu termeni pozitivi:  $b_1, 6, b_3, 24, \dots$ . Calculați suma  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_9$ .
- 5p** 2. Demonstrați că ecuația  $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$  admite rădăcini reale distincte, oricare ar fi  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p** 3. Determinați soluțiile reale ale ecuației  $4^{2x+1} - 5 \cdot 4^x + 1 = 0$ ;
- 5p** 4. Fie dezvoltarea  $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{30}$ , unde  $x \in \mathbb{R}^*$ . Determinați rangul termenului care nu conține pe  $x$ .
- 5p** 5. În triunghiul  $ABC$ ,  $M$ ,  $N$  și  $P$  sunt mijloacele laturilor  $BC$ ,  $AC$  și, respectiv  $AB$ . Arătați că  $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = \vec{0}$ .
- 5p** 6. În triunghiul  $ABC$  avem  $m(\sphericalangle A) = 45^\circ$ ,  $m(\sphericalangle B) = 105^\circ$  și  $AB = 3\sqrt{3}$ . Calculați lungimea laturii  $BC$ .

**SUBIECTUL II****(30 puncte)**

1. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Fie mulțimea  $G = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$ .
- 5p** a) Demonstrați că oricare ar fi  $X \in G$  există  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ;
- 5p** b) Fie o matrice  $B \in M_2(\mathbb{R})$  astfel încât există  $n \in \mathbb{N}^*$  cu  $B^n = A$ . Demonstrați că  $B \in G$ ;
- 5p** c) Determinați toate matricele  $C \in M_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $C^3 = A$ .
2. Pe  $\mathbb{R}$  considerăm legea " $\circ$ " definită prin  $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ . Se știe că această lege este asociativă.
- 5p** a) Determinați elementul neutru al acestei legi;
- 5p** b) Prin inducție matematică demonstrați că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  are loc relația
- $$\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori de } x} = (x-6)^n + 6.$$
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  care verifică ecuația  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{8 \text{ ori de } x} = 262$ .

**SUBIECTUL III****(30 puncte)**

1. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2} - x^2$ .
- 5p** a) Demonstrați că ecuația  $f'(x) = 0$  admite o singură rădăcină reală.
- 5p** b) Determinați imaginea funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\sqrt[4]{e} \cdot \sqrt[9]{e} > \frac{25}{18}$ .
2. Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x - x \sin x$  și  $g(x) = x \cos x$ .
- 5p** a) Demonstrați că funcția  $g$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_1^{\pi/2} f(x) \ln x \, dx$ .
- 5p** c) Calculați  $\int_1^{\sqrt{\pi/2}} x f(x^2) \ln x \, dx$ .