Simulare, Bacalaureat, 28 ianuarie 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, matematică-informatică ***Simulare***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $z-2\overline{z}=1+3i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați parametrul real m pentru care $x^2+(m-1)x+m-1>0$, pentru orice număr x real.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{1+3x}=1-x$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

5p **5.** Fie $ABCD$ paralelogram și P un punct astfel încât $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PD}$. Arătați că $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

5p **6.** Se dau numerele reale a și b pentru care $a+b=\frac{\pi}{3}$. Demonstrați că $\sin 2a-\sin 2b-\sin(a-b)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\x&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A(x)+I_3\right)=0$.

5p **c)** Arătați că $\det\left(aI_3-b\cdot A(-1)+c\cdot A(-1)\cdot A(-1)\right)\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a,b,c.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy+2x+2y-2$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x*x*x*x=1$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=2$, atunci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\frac{1}{e^2}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, cu $a \in \left(-\sqrt{2}, -1\right)$, ecuația $f(x) = a$ are exact două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

5p **a)** Calculați $\int \left(x^2 + 1\right) \cdot f(x)\,dx$.

5p **b)** Determinați funcția $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, primitivă a funcției f, pentru care $G(1) = \ln 2$.

5p **c)** Calculați $\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx$.