Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $6-3\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+2}=5^x+24$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 3.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Arătați că dreptele MD și AB sunt paralele.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, în care $AC=3$ și măsurile unghiurilor A și B sunt de 30°, respectiv 60°.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&i&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ și $A(z)=aI_3+bB$, unde $z=a+ib$, cu a și b numere reale și $i^2=-1$.

5p **a)** Arătați că $\det B=i$.

5p **b)** Demonstrați că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

2. Pe $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_2\left(2^{x+y}-2^{x+1}-2^{y+1}+6\right)$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\log_2\left(\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)+2\right)$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Arătați că $x*x*x<3x$, pentru orice $x\in M$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^3+3x+1\right)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(2-x)\left(x^2-x+1\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)\cdot e^x}=e^{-2}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left|\dfrac{f(x)}{e^{-x}}-1\right|$ are un singur punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=10$.

5p **b)** Demonstrați că $F\left(\sqrt{7}\right)<F(3)$, pentru orice primitivă F a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $\int_3^5 f(x)dx=m(4\ln 2-1)$.