

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$x = \log_6(8 \cdot 27) = 3$, $y = \sqrt{144} = 12$ Media geometrică a numerelor x și y este $\sqrt{xy} = \sqrt{3 \cdot 12} = 6$	2p 3p
2.	Graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte $\Leftrightarrow \Delta > 0$, deci $4 - 4a > 0$ $a \in (-\infty, 1)$	3p 2p
3.	$2 - x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ $x = -3$ sau $x = 1$	3p 2p
4.	$A_5^2 = 4 \cdot 5$, $C_6^2 = 3 \cdot 5$ și $A_4^2 = 3 \cdot 4$ $A_5^2 \cdot C_6^2 \cdot A_4^2 = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 60^2$	3p 2p
5.	$m_{AB} = -\frac{a+4}{3}$, $m_{BC} = 4 - a$, unde a este număr real A , B și C sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB} = m_{BC} \Leftrightarrow a + 4 = 3a - 12$, deci $a = 8$	2p 3p
6.	$MP = 20$, deci semiperimetrul $\triangle MNP$ este $p = 24$ $\mathcal{A}_{\triangle MNP} = \frac{MN \cdot NP}{2} = 96 \Rightarrow r = \frac{\mathcal{A}_{\triangle MNP}}{p} = \frac{96}{24} = 4$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -4 + 2 + (-2) - 4 - (-1) - (-4) = -3$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = a^3 - 4a$, pentru orice număr real a $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a(a-2)(a+2) \neq 0$, deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$	2p 3p
c)	Dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului cu $x_0 = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{3}$, atunci $\begin{cases} ax_0 + 4x_0 + 3x_0 = 1 \\ 2x_0 + 8x_0 - 3ax_0 = 1, \\ x_0 + 2ax_0 - 3x_0 = 0 \end{cases}$ unde a este număr real, deci $\begin{cases} x_0(a+7) = 1 \\ x_0(10-3a) = 1 \\ 2x_0(a-1) = 0 \end{cases}$ $x_0(a+7) = 1$, deci $x_0 \neq 0$ și, cum $2x_0(a-1) = 0$, obținem că $a = 1$; $x_0(a+7) = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{8}$ și $x_0(10-3a) = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{7}$, ceea ce este imposibil	2p 3p

2.a)	$2021 * (-2021) = \sqrt[3]{2021^3 + (-2021)^3 - 27} = \sqrt[3]{2021^3 - 2021^3 - 27} = \sqrt[3]{-27} = -3$	3p 2p
b)	$x * e = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + e^3 - 27} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 - 27 = x^3$, pentru orice număr real $x \Leftrightarrow e = 3$ Cum $3 * x = \sqrt[3]{3^3 + x^3 - 27} = \sqrt[3]{x^3} = x$, pentru orice număr real x , obținem că $e = 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p 2p
c)	$f(x) * f(y) = \sqrt[3]{f^3(x) + f^3(y) - 27} = \sqrt[3]{(x+27) + (y+27) - 27} = \sqrt[3]{x+y+27} = f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{3x^2(x^6+7) - 6x^5(x^3+3)}{(x^6+7)^2} = \frac{-3x^2(x^6+6x^3-7)}{(x^6+7)^2} = \frac{-3x^2(x^3-1)(x^3+7)}{(x^6+7)^2}$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+3}{x^6+7} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+3}{x^6+7} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$ la graficul funcției f , iar graficul funcției f nu admite asimptote verticale	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{7}$, $x = 0$ sau $x = 1$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{7}] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, -\sqrt[3]{7}]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-\sqrt[3]{7}, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-\sqrt[3]{7}, 1]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$ $f(-\sqrt[3]{7}) = -\frac{1}{14}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, deci $-\frac{1}{14} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, pentru orice număr real x , de unde obținem $-\frac{4}{7} \leq f(x) - f(y) \leq \frac{4}{7}$, deci $ f(x) - f(y) \leq \frac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 \frac{e^{3x} f(x)}{2x+1} dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big _0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$	3p 2p
b)	$\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx = \int_0^1 (2x+1)(-e^{-x})' dx = -(2x+1)e^{-x} \Big _0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx = -\frac{3}{e} + 1 - 2e^{-x} \Big _0^1 = -\frac{3}{e} + 1 - \frac{2}{e} + 2 = \frac{3e-5}{e}$	3p 2p
c)	$\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(-\frac{2}{x}\right)' e^{-\frac{2}{x}} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{x}} \Big _1^2 = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^2} = \frac{e-1}{2e^2}$	3p 2p