Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $M=\{n\in\mathbb{N} \mid 2n+1<10\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-10x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x+\sqrt{x-5}=7$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să **nu** fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(-1,3)$. Determinați coordonatele punctului C astfel încât $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB=4$, $AC=5$ și aria egală cu 6. Calculați cosinusul unghiului A.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a+1\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+(a+1)y+az=6a+3\\ x+y+(a+1)z=4a+7\\ 2x+ay+z=2a+6\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=2(a^2+1)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot A(0)=A(0)\cdot A(a)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă (x_0,y_0,z_0) este soluția sistemului de ecuații, atunci x_0, y_0 și z_0 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{2(x+y)}{xy+2}$.

5p **a)** Arătați că $x*0=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **b)** Arătați că $x*y<2$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m*n$ este număr natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

5p **c)** Demonstrați că graficul funcției f intersectează orice dreaptă paralelă cu axa Ox în cel mult un punct.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x^2 \left(f(x)\right)^3 dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x \ln\left(f(t)\right) dt = +\infty$.