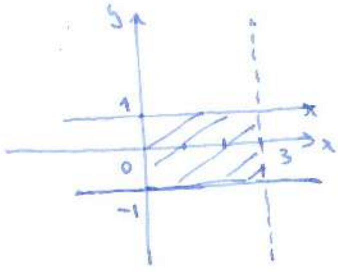
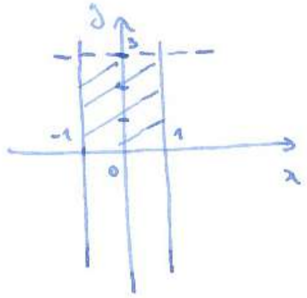
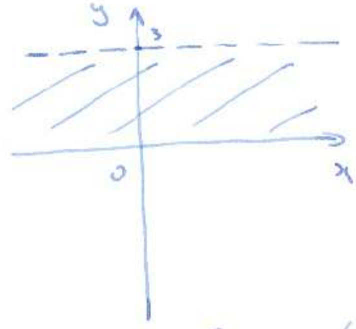
1 p ?? - Clasa a IX-a   Z 16. - 09

A. (16) Reprezentați:

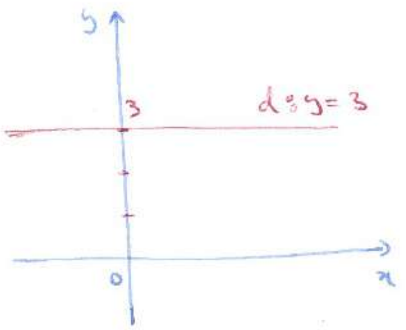
a) $[0,3) \times [-1,1]$; b) $[-1,1] \times [0,3)$; c) $\mathbb{R} \times [0,3)$

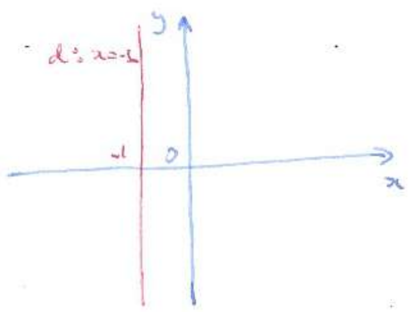




temă: Repr.: a) $\{-1\} \times \mathbb{R}$; b) $[-1,0] \times (3,\infty)$; c) $[0,\infty) \times (1,\infty)$

B (16) Reprezentați

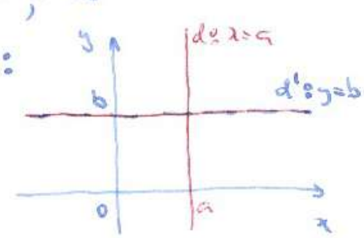
$d = \{A(x,y) \mid y=3\}$ și $d' = \{A(x,y) \mid x=-1\}$





Remarcă: prin $d: x = a$ notăm faptul că dreapta d este o dreaptă paralelă cu Oy și conține toate punctele cu abscisa a:

Analog $d': y=b$ e paralelă cu Ox



temă: Reprezentați dreptele $d: y=1$, $d': x=-1$ și determinați intersecția lor.

T.(16) Rezolvați ecuația $a\sin x + b\cos x = c$ pentru $a=1,\ b=-\sqrt{3},\ c=1$

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4}=2 \Rightarrow$ ecuația $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$ devine $2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+n\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z} \Rightarrow S=\left\{\frac{\pi}{3}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\right\}=$

$=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ ■

Temă: rezolvați ecuația dată prin alte metode

indicație: Met II: $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ pentru $x\neq(2k+1)\pi$

$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ pentru $x\neq(2k+1)\pi$

Met III: din ec. dată obținem $\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x=1$ (*)

pt $\cos x=0$ obținem $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ soluții

dar pt $\cos x\neq 0$ putem împărți (*) prin $\cos^2 x$ și obținem:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-2\sqrt{3}\,\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}+3=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Notăm $\operatorname{tg} x=t$ și obținem $t^2-2\sqrt{3}t+3=1+t^2$ etc.

Găsiți și alte metode.

G.(16) Fie $\bar{u}=\alpha\bar{i}+3\bar{j}$. Determinați $\alpha\in\mathbb{R}$ a.î. $\bar{u}$ să fie coliniar cu

a) $\bar{v}_1=2\bar{i}+3\bar{j}$; b) $\bar{v}_2=2\bar{j}$; c) $\bar{v}_3=\bar{i}$; d) $\bar{v}_4=\bar{0}$

Știm că pentru $\bar{a}\nparallel\bar{b}$ și $\bar{u}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}$ nenul

$\bar{v}=\gamma\bar{a}+\delta\bar{b}$ nenul

$\bar{u}\parallel\bar{v} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ cu convenția numitorilor nuli (CNN)

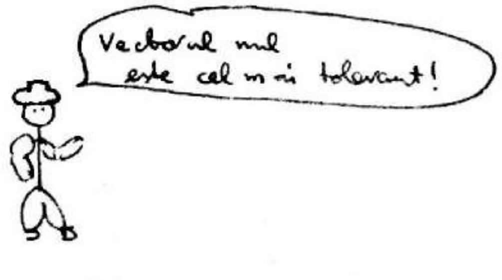
Atunci:

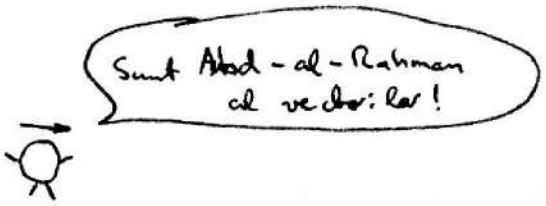
a) $\bar{u}\parallel\bar{v}_1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}=\frac{3}{3} \Leftrightarrow \boxed{\alpha=2}$

b) $\bar{u}\parallel\bar{v}_2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{0}=\frac{3}{2}$ CNN $\Leftrightarrow \boxed{\alpha=0}$

c) $\bar{u}\parallel\bar{v}_3 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1}=\frac{3}{0}$ CNN $\Rightarrow 3=0$ FALS $\forall\alpha \Rightarrow \nexists\,\alpha$ a.î. $\bar{u}\parallel\bar{v}_3$

d) $\bar{v}_4=\bar{0} \Rightarrow \bar{v}_4$ e coliniar cu orice vector deci $\bar{v}_4\parallel\bar{u}$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$





1p zi – Clasa a XI-a

Al. (16) Calculați $\det A + \det B \cdot \det C$ știind că

$$A^3 = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad C = 4A$$

---

dacă $\exists$ A și B a.î. $A^3 = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (\det A)^3 = (\det B)^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A = \sqrt[3]{2}$ și $\det B = \pm\sqrt{2}$

Cum $C = 4A$ și $A \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow C \in M_2(\mathbb{R})$ și atunci $\det C = 4^2 \det A \Rightarrow$

$\Rightarrow \det C = 4^2 \sqrt[3]{2}$

Așadar $\det A + \det B \cdot \det C = \sqrt[3]{2} \pm 4^2 \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}$ ■

$\boxed{\text{temă:}}$ Știind că $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ calculați $\det(A^{10} + 5A^2)$

An (16) Studiați mărginirea șirului $(a_n)_{n \geq 2}$, $a_n = \sum_{k=}^{n} \frac{k}{k^3 + k - 1}$

---

evident $0 \leq a_n$

cum $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k^3 + k - 1} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k^3} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \ \forall n \Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \in [0, 1) \ \forall n \geq 2 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 2}$ mărginit. ■

$\boxed{\text{temă}}$: Studiați mărginirea șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$.