A. (13) Studiați monotonia și mărginirea șirului $(a_n)_{n\ge 1}$ cu $a_n = \frac{2n-3}{n^2+n}$.

• Mărginire:

cu $\forall n \ge 2 \quad a_n > 0$, $a_1 = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow a_n \ge -\frac{1}{2} \ \forall n$. (*)

Studiem dacă $a_n < 1$ pt $n \ge 1$

$a_n < 1 \Leftrightarrow \frac{2n-3}{n^2+n} < 1 \Leftrightarrow \frac{2n-3-n^2-n}{n^2+n} < 0$; cum $n^2+n > 0 \ \forall n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - n + 3 > 0$ (A) $\forall n \ge 1$ deoarece:

• $x^2 - x + 3 = 0$

$\Delta = 1 - 4\cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow x^2 - x + 3 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Așadar $a_n < 1 \ \forall n \ge 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} a_n \in [-\frac{1}{2}, 1) \ \forall n \ge 1 \Rightarrow (a_n)_n$ mărginit.

• Monotonie

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-3}{(n+1)^2+n+1} - \frac{2n-3}{n^2+n} = \frac{2n-1}{n^2+3n+2} - \frac{2n-3}{n^2+n} =$$

$$= \frac{(2n-1)(n^2+n) - (2n-3)(n^2+3n+2)}{(n^2+3n+2)(n^2+n)} =$$

$$= \frac{\cancel{2n^3} + 2n^2 - n^2 - n - \cancel{2n^3} - 6n^2 - 4n + 3n^2 + 9n + 6}{(n^2+3n+2)(n^2+n)} =$$

$$= \frac{-2n^2 + 4n + 6}{(n^2+3n+2)(n^2+n)}$$

evident $n^2+3n+2 > 0 \ \forall n \ge 1$
$n^2 + n > 0 \ \forall n \ge 1$

și cum $-2n^2 + 4n + 6 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 < \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$

$\Rightarrow$

x		-1		3	
$-2x^2+4x+6$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n \le 0 \ \forall n \ge 3$

$\Rightarrow a_1 \le a_2 < a_3 \ge a_4 > a_5 > a_6 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$

ceea ce înseamnă că deși $a_1 < a_2 \le a_3$ șirul $(a_n)_{n \ge 3}$ este $\searrow$ ■

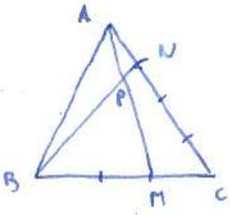
Temă: Studiați monotonia și mărginirea șirului $(a_n)_{n\ge 1}$, $a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$

G. (13) În $\triangle ABC$ considerăm $M \in (BC)$ a.î. $MB = 2MC$

și $N \in (AC)$ a.î. $NC = 3AN$

Notăm $BN \cap AM = \{P\}$

Aflați $\frac{AP}{PM}$!



<u>Met I</u> presupune folosirea teoremei de caracterizare a unui punct ce împarte un segment într-un raport dat. (pe care o vom numi Th. Sud America datorită numelui lung!)

$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -3 \Rightarrow \overline{BN} = \frac{1}{4}\overline{BC} + \frac{3}{4}\overline{BA}$

$\frac{\overline{PA}}{\overline{PM}} \overset{not}{=} k \Rightarrow \overline{BP} = \frac{1}{1-k}\overline{BA} - \frac{k}{1-k}\overline{BM}$

Dar $\overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ $\Rightarrow \overline{BP} = -\frac{2k}{3(1-k)}\overline{BC} + \frac{1}{1-k}\overline{BA}$

Dar $\overline{BP} \parallel \overline{BN}$ în condițiile în care $\overline{BC} \nparallel \overline{BA}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\frac{-2k}{3(1-k)}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{1-k}}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow -\frac{2k}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{PA}{PM} = \frac{1}{2}$ ■

<u>Met II</u> presupune folosirea teoremei lui Menelaus în $\triangle AMC$ cu transversala BPN:

$\frac{BC}{BM} \cdot \frac{PM}{PA} \cdot \frac{NA}{NC} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{PM}{PA} \cdot \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{PA}{PM} = \frac{1}{2}$ ■

Am folosit:

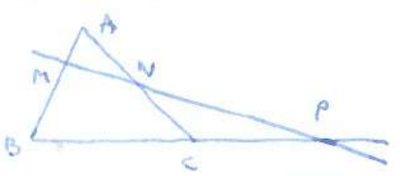
<u>Propoziție:</u>

Fie $\bar{u}, \bar{v} \in V_2$ doi vectori necoliniari și $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$

atunci $\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \parallel a\bar{u} + b\bar{v} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$

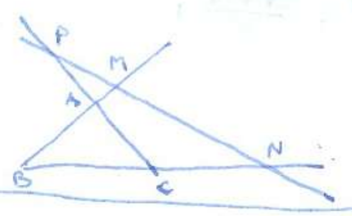
<u>Teoremă Menelaus:</u>

Dacă o dreaptă d taie dreptele suport ale $\triangle ABC$ în $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$ atunci



$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$

sau



<u>Temă:</u> Aflați $\frac{PB}{PN}$ în condițiile exercițiului anterior.

T. (13) Demonstrați că $tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\forall x \in (-1,1)$

Fie $x \in (-1,1)$

$$tg(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\cos(\arcsin x)} \quad (*)$$

$\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1 \Rightarrow \cos^2(\arcsin x) + x^2 = 1 \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$

Cum $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(\arcsin x) \geq 0$ $\forall x \in [-1,1]$ $\Rightarrow$

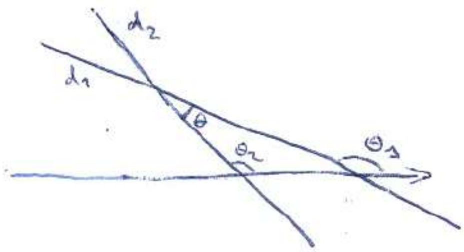
$\Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ $\forall x \in [-1,1] \overset{(*)}{\Rightarrow} tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\forall x \in (-1,1)$ ■

Temă: Dem. că $tg(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\forall x \in (-1,1)$

G. (13) Determinați măsura unghiului dintre $d_1: x+2y-5=0$ și $d_2: 2x+3y+4=0$

$d_1: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = arctg\left(-\frac{1}{2}\right)$

$d_2: y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \theta_2 = arctg\left(-\frac{2}{3}\right)$



$\theta_1 = \theta + \theta_2 \Rightarrow \theta = \theta_1 - \theta_2 \Rightarrow tg\,\theta = \frac{tg\,\theta_1 - tg\,\theta_2}{1 + tg\,\theta_1\, tg\,\theta_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\,\theta = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow \theta = arctg\,\frac{1}{8}$ ■

Temă: Determinați măsura unghiului dintre $d_1: x+2y-5=0$ și $d_2: 2x-y+3=0$

1p 81 - Clasa a XI-a 213 - 11

Al. (13) Rezolvați: $\begin{cases} A+2B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix} & (*) \\ A-B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} & (**) \end{cases}$

$(*) - (**) \Rightarrow 3B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A=B+\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ ■

Temă: Rezolvați $\begin{cases} 2A+B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 5 & 7 & 6\end{pmatrix} \\ A+B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 4\end{pmatrix} \end{cases}$

An (13) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\frac{2n+1}{3n-1}$. Demonstrați că $(x_n)_n$ este monoton și mărginit

---

• $x_{n+1}-x_n=\frac{2(n+1)+1}{3(n+1)-1}-\frac{2n+1}{3n-1}=\frac{2n+3}{3n+2}-\frac{2n+1}{3n-1}=\frac{(2n+3)(3n-1)-(2n+1)(3n+2)}{(3n+2)(3n-1)}=$

$=\frac{6n^2-2n+9n-3-6n^2-4n-3n-2}{(3n+2)(3n-1)}=-\frac{5}{(3n+2)(3n-1)}<0 \quad \forall n\geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \searrow$ (1)

• $x_n \searrow \Rightarrow x_n < x_1 \quad \forall n$

$x_n > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{3n-1} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6n+3 > 6n-2 \Rightarrow 3>-2$ (A) $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ mărginit (2)

(1), (2) $\xrightarrow{\text{Th Weierstrass}}$ $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent

Într-adevăr $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(2+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(3-\frac{1}{n})}=\frac{2}{3}$ ■

Bonus: $x_n=\frac{\frac{2}{3}(3n-1)+\frac{2}{3}+1}{3n-1}=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{3n-1}}_{\searrow}\ \searrow$.

Temă: Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\frac{1}{3n-1}$. Demonstrați că $(x_n)_n$ e monoton și mărginit