Ap 21 - Clasa a IX-a 2.12 - 09

A. (42) Studiați mărginirea și monotonia șirului

$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad n \geq 1$

• Mărginire:

cel mai mic termen al sumei este $\frac{1}{2n}$

iar cel mai mare $\frac{1}{n+1}$

Atunci $\forall\, n \geq 1 \quad n \cdot \frac{1}{2n} < a_n < n \cdot \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < a_n < \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall\, n \geq 1 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ mărginit.

• Monotonie:

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} -$

$- \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - {}^{2)}\frac{1}{n+1} =$

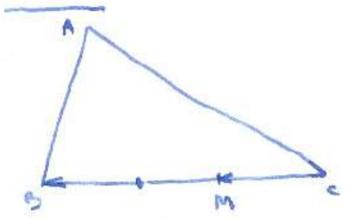
$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \quad \forall\, n \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n \quad \forall\, n \geq 1 \Rightarrow (a_n) \nearrow$ ■

Temă: Studiați monotonia și mărginirea șirului

$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

B. (42) Exprimați $\overline{AM}$ în funcție de $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ dacă $\overline{MB} = 2\,\overline{CM}$



$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -2 \Rightarrow \overline{AM} = \frac{1}{1-(-2)}\overline{AB} - \frac{-2}{1-(-2)}\overline{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AM} = \underbrace{\frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC}}$ ■

descompunerea lui $\overline{AM}$ în lungul lui $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$

Am folosit Teorema de caracterizare a unui punct ce împarte un segment într-un raport dat:

Fie $B \neq C$ și $M \in BC$, $C \neq M$ iar $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

UASE:

a) $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = k$

b) $\forall\, Q \in P \quad \overline{QM} = \frac{1}{1-k}\overline{QB} - \frac{k}{1-k}\overline{QC}$

c) $\exists\, Q \in P$ a.î. $\overline{QM} = \frac{1}{1-k}\overline{QB} - \frac{k}{1-k}\overline{QC}$

Temă: Dacă AM mediană în $\triangle ABC$ descompuneți $\overline{AM}$ în lungul lui $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$.

T. (12) Calculați:

$\alpha = \sin\left(\arcsin \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{3}\right)$

$\alpha = \sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)\cdot\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) + \sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) =$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1 + \ldots$ ■

Am folosit:

$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1,1]$

$\cos(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1,1]$

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [-1,1]$

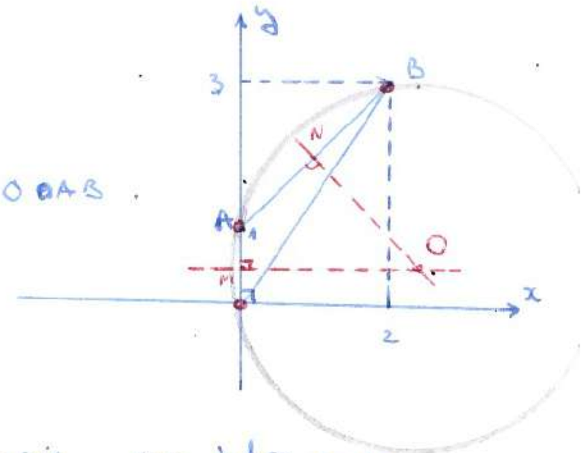
$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [-1,1]$

Temă: Calculați $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{1}{3}\right)$

G. (12) Fie $A(0,1)$, $B(2,3)$

a) det coord cdg al $\triangle OAB$

b) det coord centrului cerc circ $\triangle OAB$.



---

a) $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_O + x_A + x_B}{3} \\ y_G = \dfrac{y_O + y_A + y_B}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

b) Pt a determina centrul cercului circumscris vom intersecta mediatoarele segmentelor (AO) respectiv (AB)

Fie M mijlocul lui $(AO) \Rightarrow M\left(0, \frac{1}{2}\right)$; $m_{AO} \parallel Ox$ $\Rightarrow m_{[AO]}: y = \frac{1}{2}$

Fie N mijlocul lui $(AB) \Rightarrow N(1,2)$

$m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{2} = 1$

$m_{[AB]} \perp AB \Rightarrow m_{m_{[AB]}} = -\dfrac{1}{m_{AB}}$ $\Rightarrow m_{[AB]} = -1$ $\Rightarrow m_{[AB]}: \dfrac{y-2}{x-1} = -1$ CNN

așadar O verifică $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y - 2 = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ■

Temă: Aceeași problemă pentru $A(0,4)$, $B(2,0)$

1 p.o. - Clasa a XI-a 2.12.-11

A. (12) Rezolvați: $A + 3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 6 & 3 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ -5 & -3 & 3\end{pmatrix}$ ■

$\boxed{\text{temă}}$: Rezolvați cu atenție:

$$A + 3\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

An (12) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{2n+1}{3n-1}$ este convergent.

Vom folosi Th lui Weierstrass:

$\boxed{\text{Un șir monoton și mărginit este convergent}}$

• mărginire:

evident $a_n > 0 \quad \forall\, n \geq 1$

Arătăm că $a_n < 1 \quad \forall\, n \geq k$ fixat

$\frac{2n+1}{3n-1} < 1 \Leftrightarrow 2n+1 < 3n-1$ (deoarece $3n-1 > 0$!!!) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > 2$

Așadar $a_n < \text{Max}\{a_1, a_2, 1\} \quad \forall\, n \geq k$

$a_n > 0 \quad \forall\, n \geq 1$ $\Rightarrow (a_n)_n$ mărginit

• monotonie:

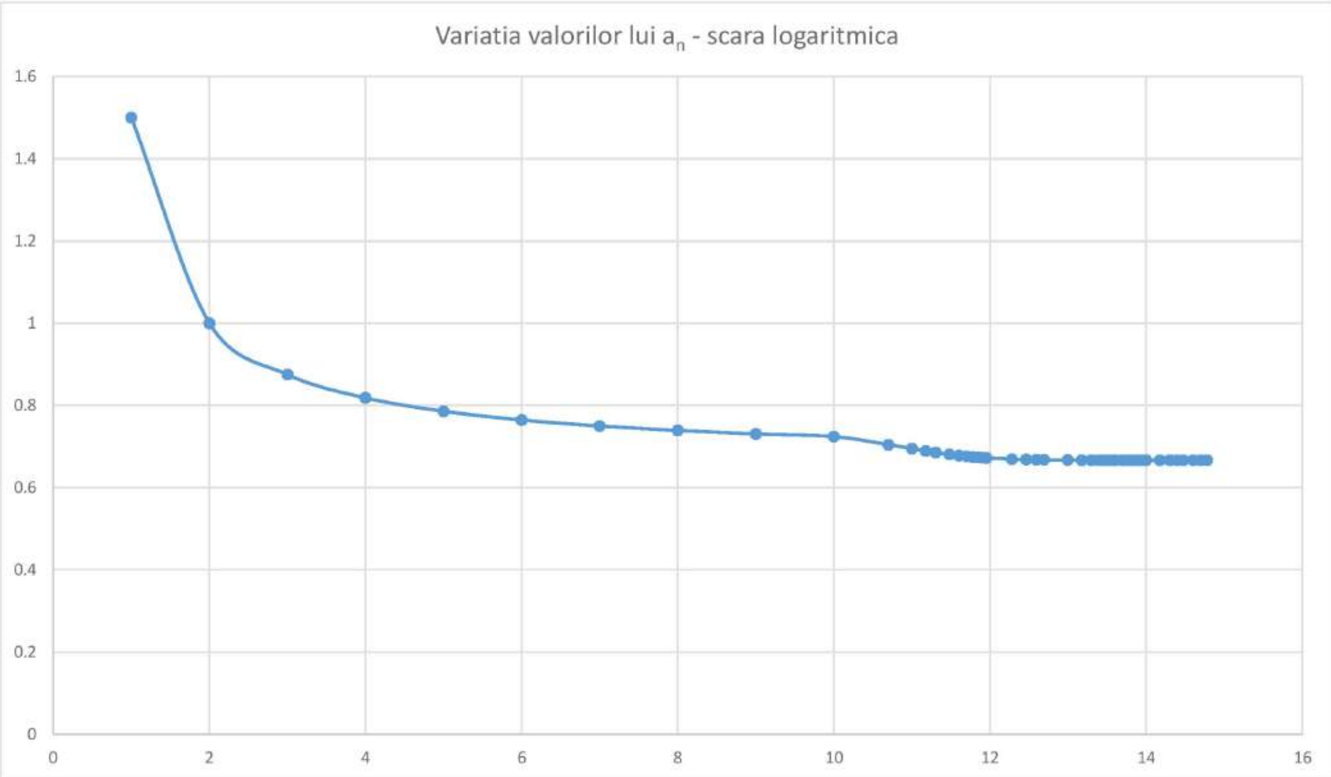
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)-1} - \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{(2n+3)(3n-1)-(2n+1)(3n+2)}{(3n+2)(3n-1)} =$$

$$= \frac{6n^2-2n+9n-3-6n^2-4n-3n-2}{(3n+2)(3n-1)} = -\frac{5}{(3n+2)(3n-1)} < 0 \quad \forall\, n \geq 1$$

$\Rightarrow (a_n)_n \searrow$

Cum $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton și mărginit deducem că $(a_n)_{n\geq 1}$ e convergent. ■

Într-adevăr, în tabelul alăturat observăm atât că valorile lui $(a_n)_n$ sunt din ce în ce mai apropiate de $\frac{2}{3} = 0,(6)$ cât și că diferența $\left|a_n - \frac{2}{3}\right|$ e din ce în ce mai nesemnificativă.


Variatia valorilor lui a_n - scara logaritmica
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16

n	a_n	a_n-2/3
1	1.5	0.833333333
2	1	0.333333333
3	0.875	0.208333333
4	0.818181818	0.151515152
5	0.785714286	0.119047619
6	0.764705882	0.098039216
7	0.75	0.083333333
8	0.739130435	0.072463768
9	0.730769231	0.064102564
10	0.724137931	0.057471264
15	0.704545455	0.037878788
20	0.694915254	0.028248588
25	0.689189189	0.022522523
30	0.685393258	0.018726592
40	0.680672269	0.014005602
50	0.677852349	0.011185682
60	0.675977654	0.009310987
70	0.674641148	0.007974482
80	0.673640167	0.006973501
90	0.672862454	0.006195787
100	0.672240803	0.005574136
200	0.669449082	0.002782415
300	0.668520578	0.001853912
400	0.668056714	0.001390047
500	0.667778519	0.001111852
1000	0.667222407	0.000555741
1500	0.667037119	0.000370453
2000	0.666944491	0.000277824
2500	0.666888919	0.000222252
3000	0.666851872	0.000185206
3500	0.666825412	0.000158745
4000	0.666805567	0.0001389
5000	0.666777785	0.000111119
6000	0.666759264	9.25977E-05
7000	0.666746036	7.93689E-05
8000	0.666736114	6.94473E-05
9000	0.666728397	6.17307E-05
10000	0.666722224	5.55574E-05
15000	0.666703705	3.70379E-05
20000	0.666694445	2.77782E-05
25000	0.666688889	2.22225E-05
30000	0.666685185	1.85187E-05
40000	0.666680556	1.3889E-05
50000	0.666677778	1.11112E-05
60000	0.666675926	9.25931E-06

$$a_n=(2n+1)/(3n-1)$$