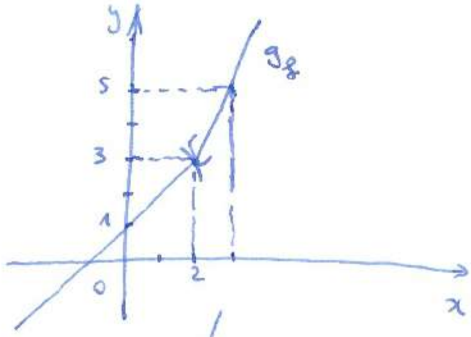
A. (10) Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 2 \\ x+1, & x < 2 \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} 4x, & x \geq 1 \\ 3x+1, & x < 1 \end{cases}$

a) Reprezentați G_f, G_g

b) Determinați $f \circ g$ și $g \circ f$

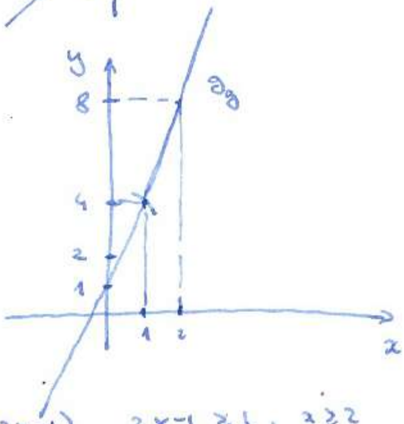
c) Reprezentați G_{f+g}



a)

x	0	2	3
$x+1$	1	)3	////
$2x-1$	////	[3	5

x	0	1	2
$3x+1$	1	)4	////
$4x$	////	[4	8



b) $\mathrm{Im}\, f \subset D_g \Rightarrow$ are sens $g \circ f$

$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 4f(x), & f(x) \geq 1 \\ 3f(x)+1, & f(x) < 1 \end{cases} = \begin{cases} 4(2x-1), & 2x-1 \geq 1, \ x \geq 2 \\ 4(x+1), & x+1 \geq 1, \ x < 2 \\ 3(2x-1)+1, & 2x-1 < 1, \ x \geq 2 \\ 3(x+1)+1, & x+1 < 1, \ x < 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 8x-2, & x \geq 1, \ x \geq 2 \\ 4x+4, & x \geq 0, \ x < 2 \\ \cancel{6x-2, \quad x < 1, \ x \geq 2} & \text{IMPOSIBIL} \\ 3x+4, & x < 0, \ x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 8x-2, & x \geq 2 \\ 4x+4, & x \in [0,2) \\ 3x+4, & x < 0 \end{cases}$$

$\mathrm{Im}\, g \subset D_f \Rightarrow$ are sens $f \circ g$ și $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iar

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2g(x)-1, & g(x) \geq 2 \\ g(x)+1, & g(x) < 2 \end{cases} = \begin{cases} 2 \cdot 4x - 1, & 4x \geq 2, \ x \geq 1 \\ 2(3x+1)-1, & 3x+1 \geq 2, \ x < 1 \\ 4x+1, & 4x < 2, \ x \geq 1 \\ 3x+1+1, & 3x+1 < 2, \ x < 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 8x-1, & x \geq 1 \\ 6x+1, & x \in [\frac{1}{3}, 1) \\ 3x+2, & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$. Obs. că $f \circ g \neq g \circ f$

c) $D_f = D_g \Rightarrow$ are sens $f+g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și

Cum

x			
$f(x)$	$x+1$	$x+1$)[	$2x-1$
$g(x)$	$3x+1$)[	$4x$	$4x$
$f(x)+g(x)$	$4x+2$)[	$5x+1$)[	$6x-1$

deci $(f+g)(x) = \begin{cases} 4x+2, & x < 1 \\ 5x+1, & x \in [1,2) \\ 6x-1, & x \geq 2 \end{cases}$

1p și - Clasa a X-a $\qquad$ 2 10 - 10

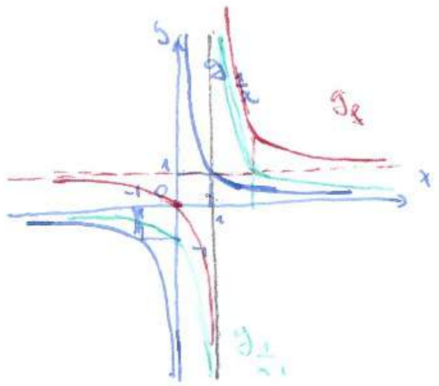
A. (10) Fie $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Dem că f e bijectivă și determinați f^{-1}

Met I:

$f(x) = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

Reprezentăm g_f pornind de la $g_{\frac{1}{x}}$: $\frac{1}{x} \xrightarrow{1} \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\uparrow 1} 1+\frac{1}{x-1}$



și deducem că $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

de unde obținem că f este surjectivă (1)

și cum $f \searrow$ pe $(-\infty, 1) \Rightarrow f$ inj pe $(-\infty,1)$

~~iar~~ $f \searrow$ pe $(1,\infty) \Rightarrow f$ inj pe $(1,\infty)$

și $f(-\infty,1) = (-\infty,1)$

$f(1,\infty) = (1,\infty)$ $\Rightarrow f$ inj (2)

(1)+(2) $\Rightarrow f$ bijectivă deci inversabilă.

O altă metodă de a demonstra inversabilitatea funcției f este:

Fie $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = y \Leftrightarrow x = yx - y \Leftrightarrow x(y-1) = y$, cum $y-1 \neq 0$ $\Rightarrow x = \frac{y}{y-1}$

$\frac{y}{y-1} = 1 \Leftrightarrow y = y-1 \Leftrightarrow 0 = -1$ Fals $\forall y \Rightarrow x = \frac{y}{y-1} \neq 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\exists!\ x = \frac{y}{y-1} \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ a.î. $f(x) = y \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ bijectivă deci inversabilă și în plus $f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f^{-1}(y) = \frac{y}{y-1}$

așadar $f^{-1} = f$!

Temă: Fie $f: \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Demonstrați că f e bijectivă și determinați f^{-1}

Al (10) Rezolvați ecuația $X^2=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Din Th. Hamilton-Cayley $\Rightarrow X^2-\operatorname{Tr}X\cdot X+\det X\cdot I_2=O_2$

$X^2=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{Tr}(X^2)=3+1=4$

$\det(X^2)=3-4=-1\Rightarrow(\det X)^2=-1\Rightarrow\det X=\pm i$

(I) dacă $\det X=i\Rightarrow X^2-\operatorname{Tr}X\cdot X+i\cdot I_2=O_2\Rightarrow$

$\Rightarrow\operatorname{Tr}\left(X^2-\operatorname{Tr}X\cdot X+i\cdot I_2\right)=0\Rightarrow\operatorname{Tr}(X^2)-(\operatorname{Tr}X)^2+i\cdot\operatorname{Tr}I_2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 4-(\operatorname{Tr}X)^2+2i=0\Rightarrow(\operatorname{Tr}X)^2=4+2i$

Not $\operatorname{Tr}X=a+bi\Rightarrow a^2-b^2+2abi=4+2i\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=4 & (*)\\2ab=2\Rightarrow ab=1\end{cases}$

evident $b\neq0$ (altfel $\operatorname{Tr}X$ ar fi real) $\Rightarrow a=\frac{1}{b}\overset{(*)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow\frac{1}{b^2}-b^2=4$ | $\Rightarrow\frac{1}{t}-t=4\Leftrightarrow t^2+4t-1=0<\frac{-4\pm2\sqrt5}{2}=-2\pm\sqrt5$

Notez $b^2=t\geq0$ | $t>0\Rightarrow$

$\Rightarrow t=\sqrt5-2\Rightarrow b=\pm\sqrt{\sqrt5-2}$

- Pentru $b=\sqrt{\sqrt5-2}\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{\sqrt5-2}}=\frac{\sqrt{\sqrt5+2}}{1}=\sqrt{\sqrt5+2}\Rightarrow\operatorname{Tr}X=\sqrt{\sqrt5+2}+\sqrt{\sqrt5-2}\,i$

Cum $\operatorname{Tr}X\cdot X=X^2+iI_2\Rightarrow X_1=\frac{1}{\operatorname{Tr}X}\cdot\begin{pmatrix}3+i&2\\2&1+i\end{pmatrix}$

- Pentru $b=-\sqrt{\sqrt5-2}\Rightarrow$ obținem soluția $X_2=-X_1$

(II) dacă $\det X=-i\Rightarrow X^2-\operatorname{Tr}X\cdot X-i\cdot I_2=O_2\Rightarrow$

$\Rightarrow\operatorname{Tr}\left(X^2-\operatorname{Tr}X\cdot X-i\cdot I_2\right)=O_2\Rightarrow\operatorname{Tr}(X^2)-(\operatorname{Tr}X)^2-2i=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(\operatorname{Tr}X)^2=4-2i$

Obținem $X_3=\overline{X_1}$ și $X_4=\overline{X_2}$

Așadar $S=\{X_1,-X_1,\overline{X_1},-\overline{X_1}\}$ unde $X_1=\frac{1}{\sqrt{\sqrt5+2}+\sqrt{\sqrt5-2}\,i}\cdot\begin{pmatrix}3+i&2\\2&1+i\end{pmatrix}$ ■

Bonus: Rezolvați ecuația $X^2=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\det X^2=-1\Rightarrow(\det X)^2=-1\Rightarrow\det X=\pm i\Rightarrow$ dacă ecuația are soluție aceasta e în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\setminus\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\Rightarrow$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $S=\varnothing$ ■