1 p 21 - clasa a IX -a 2021-09

A. ⑦ Găsiți punctele fixe ale funcției $f: \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3x+2} = x \Leftrightarrow 2x+1 = 3x^2+2x \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \neq -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow S = \{\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\}$$

Reamintim: Se numesc puncte fixe ale unei funcții $f: D \to \mathbb{R}$ elementele $x \in D$ cu proprietatea că $f(x) = x$

Obs: Dacă $a \in D_f$ pct. fix $\Rightarrow A(a, f(a)) \in G_f \cap b_1$

temă: găsiți punctele fixe ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x+2$

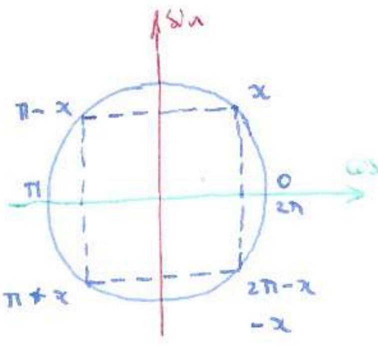
T. ⑦ Citiți și înțelegeți:

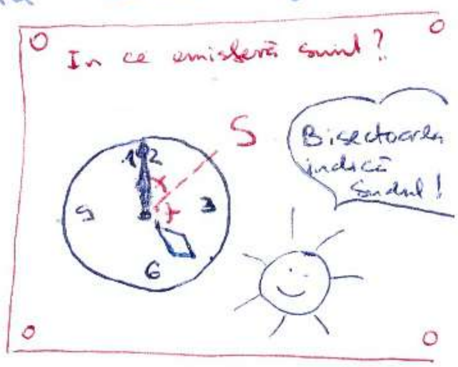
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \begin{cases} \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \end{cases}$$

Am folosit
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

temă: Explicați formulele de mai jos folosind cercul trigo:

$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$





$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(2\pi - x) = \cos x$
$\sin(2\pi - x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$ $\forall x \Rightarrow$ pară
$\sin(-x) = -\sin x$ $\forall x \Rightarrow$ impară

1p 7 - Clasa a X-a

A (7) Studiați paritatea funcției

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

a) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

b) fie $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln\left((x+\sqrt{x^2+1})^{-1}\right) =$$

$$= -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -f(x)$$

a, b $\Rightarrow$ f impară ■

Reamintim că $f: A \to \mathbb{R}$ a.î.

a) pară $\Leftrightarrow$ (1) $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$
(2) $\forall x \in A \Rightarrow f(-x) = f(x)$.

b) impară $\Leftrightarrow$ (1) $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$
(2) $\forall x \in A \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

Temă: Studiați paritatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

G. (7) Fie $A(1,2)$, $B(0,2)$. Determinați C a.î. OABC echilateral

$AB = 1 \Rightarrow$ tb $\begin{cases} AC = 1 \\ BC = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ (x-0)^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases}$

"−": $-2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ $\Big| \Rightarrow \frac{1}{4} + (y-2)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-2)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y - 2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \left\{ C\left(\frac{1}{2}, 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right), C'\left(\frac{1}{2}, 2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}$ ■

Temă: Fie $A(13,14)$, $B(14,15)$. Câte puncte C se pot determina astfel încât $\triangle ABC$ echilateral?

a) unul singur; b) două; c) nu există niciunul (deoarece 13, 14, 15 sunt consecutive)

A (7) Fie $\omega \neq 1$ o rădăcină de ordinul 3 a unității.

Calculați $d = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$

$\omega^3 = 1 \Rightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$, $\omega \neq 1$ $\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} \xlongequal{\ell_3 + \ell_1 + \ell_2} \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2+\omega+1 & \omega^2+\omega+1 & \omega^2+\omega+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Temă:}}$ Fie $\varepsilon \neq -1$ rădăcină de ordinul 3 a lui -1.

Demonstrați că sistemul $\begin{cases} x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = 0 \\ \varepsilon x + \varepsilon^2 y + z = 0 \\ \varepsilon^2 x + y + \varepsilon z = 0 \end{cases}$ are o infinitate de soluții.

An (7) Dem că $\ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$

Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{x+1}$

x		-1		0	
$-x$	$+$		$+$	0	$-$
$f' = \frac{-x}{x+1}$	///	(	$+$		$-$
f	///	(	$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in (-1, \infty)$

Dar $f(0) = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \leq 0 \quad \forall x > -1 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x \quad \forall x > -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0 \quad \blacksquare$

$\boxed{\text{Temă:}}$ determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației:

$x^3 + 2x - 2 = 0$