1p ș - clasa a $\overline{IX}$-a 206 - 9

A. ⑥ Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = n!$ și citim "n factorial"

Așadar $n!$ este produsul tuturor numerelor naturale nenule, mai mici sau egale cu n

Prin convenție $1! = 1$ și în plus

$0! = 1$

În aceste condiții calculați:

$\alpha = 3! + 4! + \frac{7!}{5!}$

$\alpha = 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 6\cdot 7}{\cancel{5!}} = 6(1+4) + 6\cdot 7 = 6\cdot 12 = 72$ ◪

$\boxed{\text{temă:}}$ Demonstrați că: a) $\frac{1000!}{998!} = 999\,000$

b) $1 + \frac{2!}{1!} + \frac{3!}{2!} + \frac{4!}{3!} + \ldots + \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$

T. ⑥ Demonstrați că, într-un triunghi oarecare ABC, are loc:

$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + \underbrace{2\cos\frac{B+C}{2}}_{\cos\frac{\pi-A}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}} \cos\frac{B-C}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\underbrace{\cos\frac{B-C}{2}}_{\le 1} \le$

eg pt $\cos\frac{B-C}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{B=C}$

$\le 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2} = -2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2} + 1$ $\Longrightarrow$

Știm că $-2x^2 + 2x + 1 \le -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{12}{4\cdot(-2)} = \frac{3}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

eg pt $x = x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot(-2)} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le -2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2} + 1 \le \frac{3}{2}$

eg pt $B = C$

eg pt $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{A}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\Rightarrow$ $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}$

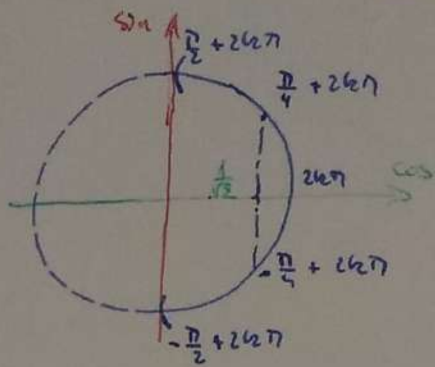
Așadar $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ $\forall\, \triangle ABC$ și egalitatea are loc pt $\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\pi}{3} \\ B = C = \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$

deci pt $\triangle ABC$ echilateral! ◪

1p 3? Clasa a $\overline{X}$-a 206 - 10

A. (6) Rezolvați ecuația

$$\log_2 (\cos x) + \frac{1}{2} = 0$$



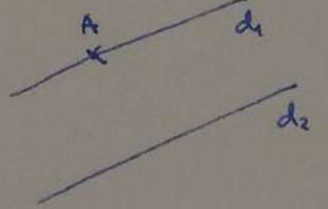
CE: $\cos x > 0 \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$\log_2 \cos x = -\frac{1}{2} \iff \cos x = 2^{-\frac{1}{2}} \iff \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x \in \left\{ \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ■

Temă: $2x - \log_5 (25^x + 25 - 5^x) = 0$

G. (6) Demonstrați că dreptele $d_1: x - 2y + 3 = 0$ și
$d_2: x - 2y + 5 = 0$ sunt paralele și
determinați distanța dintre acestea!

$d_1: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}$
$d_2: y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow d_1 \parallel d_2 \Rightarrow$ are sens să vorbim despre distanța dintre cele două drepte



Aleg $A(-1, 1) \in d_1 \Rightarrow d(d_1, d_2) = d(A, d_2)$

Dar $d(A, d_2) = \frac{|-1-2+5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow d(d_1, d_2) = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ ■

Temă: Determinați distanța dintre dreptele $d_1: x + 2y - 1 = 0$
și $d_2: 2x + 4y = 5$

1p3i - Clasa a XI-a

A ⑥ Determinați, în funcție de m, numărul soluțiilor sistemului:

$$\begin{cases} mx + my + z + t = 0 \\ x + my + mz + t = 0 \\ x + y + mz + mt = 0 \\ mx + y + z + mt = 0 \end{cases}$$

Sist e omogen $\Rightarrow$ compatibil ((0,0,0,0) e soluție)

$$= \begin{vmatrix} m & m & 1 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \\ 1 & 1 & m & m \\ m & 1 & 1 & m \end{vmatrix} \underline{\underline{l_4 + l_1 + l_2 + l_3}} \begin{vmatrix} m & m & 1 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \\ 1 & 1 & m & m \\ 2m+2 & 2m+2 & 2m+2 & 2m+2 \end{vmatrix} =$$

$$= (2m+2) \begin{vmatrix} m & m & 1 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \\ 1 & 1 & m & m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 - C_1}{=\!=} 2(m+1) \begin{vmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 0 & m & m \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(m+1) \cdot (m-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_1 - l_3}{=\!=} 2(m+1)(m-1) \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 0 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 2(m+1)(m-1) \cdot (m-1)(m-m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat cu S e infinită. ◪

Temă: Pentru sistemul de mai sus aflați m pentru care sistemul este compatibil dublu nedeterminat ☹

An ⑥ Calculați:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{\boxed{1^\infty}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \Bigg[\underbrace{\left(1 + \frac{2\sin x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1-\sin x}{2\sin x}}}_{\to e} \Bigg]^{\frac{2\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1}{x}} = e^{l} \text{ unde}$$

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{1-\sin x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \Big(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \frac{2}{1-\sin x}\Big) \overset{\frac{2}{1}}{=} 2 \Rightarrow \text{limita e } e^2$$ ◪

Temă: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+tgx}{1-tgx}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = ?$

Am folosit: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ & $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$