A.5 Calculaţi $S=\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{k^2-2}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}$ folosind identitatea:
$$k^2-2=k(k-1)+k-2$$

$S=\sum\limits_{k=3}^{n}a_k$ cu $a_k=\frac{k^2-2}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}$

Aşadar $a_k=\frac{k(k-1)+k-2}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{k(k-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-2)(k-1)\cdot k}+\frac{k}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k}-\frac{2}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}$

$$=\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(k-2)}+\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(k-1)}-\frac{2}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}\quad\forall\, k\geq3$$

Dându-i lui k valori de la 3 la n obţinem:

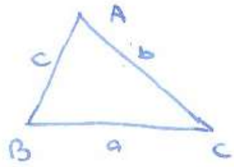
$$a_3=\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}-\frac{2}{1\cdot2\cdot3}$$
$$a_4=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$
$$a_5=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_{n-2}=\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-4)}+\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-3)}-\frac{2}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-2)}$$
$$a_{n-1}=\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-3)}+\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-2)}-\frac{2}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)}$$
$$a_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-2)}+\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)}-\frac{2}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}$$

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)}+\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)}-\frac{2}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}=$$
$$=2-\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)}+\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}=2-\frac{n-1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}\ \blacksquare$$

Temă: Folosiţi identitatea $k=(k+1)-1$ pentru a calcula suma:
$$S=\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k(k+1)}$$

T. (5) Demonstrați că într-un triunghi oarecare:

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$$



Din Th sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a^2-b^2}{c^2} = \frac{(2R\sin A)^2-(2R\sin B)^2}{(2R\sin C)^2} = \frac{\cancel{4R^2}(\sin^2 A-\sin^2 B)}{\cancel{4R^2}\sin^2 C} =$$

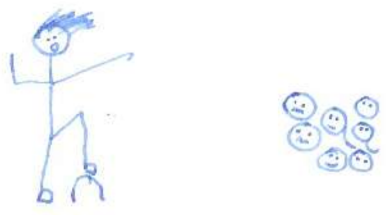
$$= \frac{(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)}{\sin C\cdot\sin(\pi-(A+B))} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin C\cdot\sin(A+B)} =$$

$$= \frac{\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)\cdot\left(2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)}{\sin(A+B)\cdot\sin C} =$$

$$= \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin(A+B)\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C} \blacksquare$$

Ideea a fost simplă:
- a^2, b^2, c^2 D.P. $\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$
- exprim MD (membrul drept) în funcție de $\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$
- calculez un pic și termin!



$\boxed{\text{temă:}}$ Demonstrați că în triunghiul oarecare ABC

$$b\cos B + c\cos C = a\cos(B-C)$$

(Indicație: $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$; iar $2\sin B\cos B = \sin 2B$;)

1p.p. Clasa a X-a 205 - 10

A. (5) Rezolvați ecuația:

$$10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x$$

Obs $x = 2$ soluție $(121 + 144 + 100 = 169 + 196)$

Rescriem ecuația:

$$10^x + 11^x + 12^x - 13^x - 14^x = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{13^x \neq 0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{\left(\frac{10}{13}\right)^x}_{\searrow \text{ pe } \mathbb{R}} + \underbrace{\left(\frac{11}{13}\right)^x}_{\searrow} + \underbrace{\left(\frac{12}{13}\right)^x}_{\searrow} - 1 - \underbrace{\underbrace{\left(\frac{14}{13}\right)^x}_{\nearrow}}_{\searrow}}_{\searrow \text{ pe } \mathbb{R} \text{ deci injectivă}} = 0$$

Evident $x = 2$ rămâne soluție $\Rightarrow x = 2$ unica soluție ∎

Temă: Rezolvați ecuația: $3^x + 4^x = 5^x$

G. (5) Fie dreptele $d_1 : mx + (2m-1)y + 7 = 0$

$d_2 : (m-1)x + my - 5 = 0$

Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $d_1 \perp d_2$

Dacă $m = 0 \Rightarrow d_1 : y = 7 \Rightarrow d_1 \parallel Ox$

$d_2 : x = -5 \Rightarrow d_2 \parallel Oy$ $\Big| \Rightarrow d_1 \perp d_2$

Dacă $m \neq 0 \Rightarrow d_2 : y = \frac{1-m}{m} x + \frac{5}{m} \Rightarrow \exists\, m_{d_2} = \frac{1-m}{m}$

Dacă $m = \frac{1}{2} \Rightarrow d_1 : x = -14 \Rightarrow d_1 \parallel Oy$ deci $d_1 \not\perp d_2$

Dacă $m \neq \frac{1}{2} \Rightarrow d_1 : y = \frac{-m}{2m-1} x - \frac{7}{2m-1} \Rightarrow \exists\, m_{d_1} = \frac{-m}{2m-1}$

În aceste condiții $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{1-m}{m} \cdot \frac{-m}{2m-1} = -1$

$\Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$

Așadar $S = \{0, \frac{2}{3}\}$ ∎

Temă: pt d_1 și d_2 de mai sus aflați $m \in \mathbb{R}$ pt care $d_1 \cap d_2 \subset b_1$

1p zi – clasa a XI-a 205 – 11

Al ⑤ Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul:

$$\begin{cases} m^2x + ny + z = 0 \\ mx + ny + z = 0 \\ mx + n^2y + z = 0 \end{cases}$$

să fie incompatibil.

Sistemul este omogen așa că $(0,0,0)$ este soluție.

Prin urmare $\forall\, m, n \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil $\Rightarrow$

$\Rightarrow S = \emptyset$

$\boxed{\text{Temă:}}$ Pentru sistemul de mai sus determinați $m, n \in \mathbb{R}$ așa încât sistemul să aibă o infinitate de soluții.

An ⑤ Aflați numărul soluțiilor reale ale ecuației

$$x^3 - x^2 + m = 0$$

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x = 3x\left(x - \frac{2}{3}\right)\ \forall x$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m - \frac{4}{27}$	$\nearrow$	∞

$\leftarrow$ Explicităm tabelul în funcție de variația semnelor lui m și $m - \frac{4}{27}$ în funcție de m:

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} + m = m - \frac{4}{27}$

m		0		$\frac{4}{27}$	
m	$-$	0	$+$		$+$
$m - \frac{4}{27}$	$-$		$-$	0	$+$

Discuție după m \ x: $f(x)$	$-\infty \nearrow m \searrow m - \frac{4}{27} \nearrow \infty$	Soluții	Nr. soluții reale
pt $m < 0$	$-$ $-$ $-$ 0 $+$	f schimbă semnul când x crește de la $\frac{2}{3}$ la $\infty \Rightarrow x_1 \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$	1
pt $m = 0$	$-$ 0 $-$ 0 $+$	$x_1 = 0$ $x_2 \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$	2
pt $m \in \left(0, \frac{4}{27}\right)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$	$x_1 < 0 < x_2 < \frac{2}{3} < x_3$	3
pt $m = \frac{4}{27}$	$-$ 0 $+$ 0 $+$	$x_1 < 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$	2
pt $m > \frac{4}{27}$	$-$ 0 $+$ $+$ $+$	$x_1 < 0$	1

(De câte ori f „își schimbă semnul" se anulează datorită continuității. Am marcat aceasta notând 0 în tabelul de variație)