1p 30 - clasa a IX-a | Z 04 - 9

A. (4) Calculați $S = \sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+2)$

$(k+1)(k+2) = k^2 + 3k + 2$

Folosim comutativitatea și asociativitatea adunării pt a rescrie S:

$$S = \sum_{k=1}^{n} (k^2+3k+2) \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + 2\cdot n =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + 2n = \frac{n(n+1)(2n+10)}{6} + 2n =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)+6n}{3} = \frac{n(n^2+6n+11)}{3}$$

Am folosit:

$$1+2+3+\dots+n = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

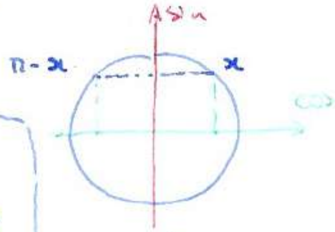
Obs: Detalierea pasului (*):

$$\sum_{k=1}^{n} k^2+3k+2 = 1^2 + 3\cdot 1 + 2 +$$
$$+ 2^2 + 3\cdot 2 + 2 +$$
$$+ 3^2 + 3\cdot 3 + 2 +$$
$$+ 4^2 + 3\cdot 4 + 2 +$$
$$\dots\dots\dots$$
$$+ (n-1)^2 + 3\cdot(n-1) + 2 +$$
$$+ n^2 + 3\cdot n + 2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\cdot\sum_{k=1}^{n} k + n\cdot 2$$

Temă: Calculați $S = \sum_{k=1}^{100} k(k+1)(k+2)$

T.4 Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghi atunci:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$



Știm că $A + B + C = \pi \Rightarrow C = \pi - (A+B)$

Deducem că:

$$\sin C = \sin(\pi - (A+B)) = \sin(A+B)$$
$$\cos C = \cos(\pi - (A+B)) = \cos(A+B)$$
$$\sin\frac{C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{A+B}{2}$$
$$\cos\frac{C}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{A+B}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$$
$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) + 1 =$$
$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) =$$
$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\cdot(-2)\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right) =$$
$$= 1 + 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \quad \text{cctd} \quad \blacksquare$$

Am mai folosit:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2} \\ 1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} \end{array}}$$

Temă: Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghi atunci:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

funcții

① Notații:
- $f: A \to B$
- (A, f, B)
- $A \xrightarrow{f} B$

② limbaj:
- domeniu : A
- codomeniu : B
- lege (de corespondență): $f(x) = \dots$
- imaginea lui x prin f: $f(x)$
- preimaginea lui $y \in B$: $f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$
- imaginea lui $C \subset A$: $f(C) = \{f(x) \mid x \in C\}$
- imaginea funcției f : $\operatorname{Im} f = f(A)$
- preimaginea lui $D \subset B$: $f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$

③ moduri de definiție
- sintetic
  - tabel
  - diagramă
  - înșiruire (enumerare)
- analitic
  - explicit
  - implicit

④ funcții reale remarcabile:
- funcția identitate $1_A : A \to A$
- funcția nulă $0_A : A \to \mathbb{R}$
- funcția constantă $\underline{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- șirurile $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) \overset{not}{=} a_n$
- funcția de gradul I $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$
- funcția de gr. al II-lea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
- funcții trigonometrice
  - $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
  - $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
  - $tg : \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$

⑤ egalitatea funcțiilor

⑥ grafic vs. reprezentare grafică

Rezolvări grafice:
- ecuații
- inecuații
- sisteme de ecuații
- sisteme de inecuații

⑦ operații cu funcții
- interne : adunare, înmulțire, COMPUNERE
- externe : înmulțire cu scalari

⑧ Proprietăți
- mărginire
- monotonie
- periodicitate
- simetrie
- paritate
- injectivitate
- surjectivitate
- bijectivitate
- inversabilitate

1 p.zi - clasa a X-a Z04-10

A (4) Rezolvați inecuația

$16^{|x|} - 2\cdot 4^{|x|} - 8 < 0$

Notăm $4^{|x|} = t > 0$

atunci $16^{|x|} = (4^2)^{|x|} = (4^{|x|})^2 = t^2$ și inecuația devine

$t^2 - 2t - 8 < 0$

$t^2 - 2t - 8 = 0 \;<\; \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix} \Rightarrow$

t		-2		4	
t^2-2t-8	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow t \in (-2,4)$, Dar $t > 0$ $\Rightarrow t \in (0,4) \Leftrightarrow 0 < 4^{|x|} < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2,2)$ ■

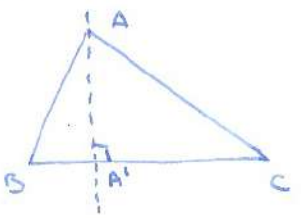
$\boxed{\text{temă}}$: Rezolvați inecuația $9^x - 5\cdot 3^x + 6 < 0$

G (4) Ecuațiile laturilor $\triangle ABC$ sunt: $AB: x + 2y = 3$

$AC: 2x - y = 1$

$BC: x - 2y + 1 = 0$

Determinați piciorul înălțimii din A.



Vom scrie ecuația înălțimii din A.

Punctul căutat este A': $\{A'\} = h_A \cap BC$

• determin A: $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(1,1)$

• determin $m_{h_A} = -\dfrac{1}{m_{BC}}$

$BC: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_{BC} = \frac{1}{2}$ $\Bigg| \Rightarrow m_{h_A} = -2$ $\Bigg| \Rightarrow h_A: \dfrac{y-1}{x-1} = -2$ CNW

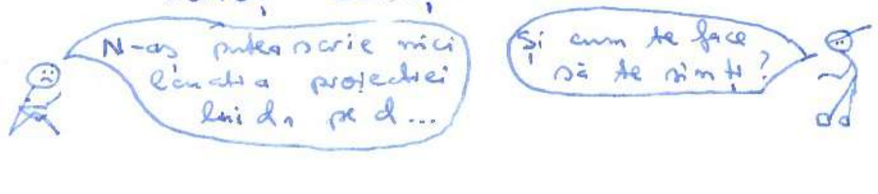
$\Downarrow$

$h_A: 2x + y - 4 = 0$

• $\{A'\} = h_A \cap BC \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$ ■

$\boxed{\text{temă}}$: fie $d_1: x + y + 2 = 0$ și $d: 2x + y = 3$

Scrieți ecuația simetricei lui d_1 față de dreapta d.



Al (4) Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ pt. care sistemul:

$$\begin{cases} a x + b y + c y = 0 \\ (a+1) x + (b+1) y + (c+1) y = 0 \\ a(a+1) x + b(b+1) y + c(c+1) y = 0 \end{cases}$$ nu are soluție unică

Sistemul este omogen așadar este compatibil ((0,0,0) soluție)

Cum sistemul nu poate fi incompatibil obținem că

IN ACEST CAZ sist e compatibil nedeterminat $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ nu e compatibil determinat $\Leftrightarrow$ $D_s = 0$

$$D_s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a(a+1) & b(b+1) & c(c+1) \end{vmatrix} \overset{l_2 - l_1}{=\!=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2+a & b^2+b & c^2+c \end{vmatrix} \overset{l_3 - l_1}{=\!=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{l_1 \leftrightarrow l_2}{=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(Vandermonde)}$$

Cum $D_s \neq 0 \Rightarrow a = b$ sau $a = c$ sau $b = c \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b, c) \in \{ (\alpha, \alpha, \beta), (\alpha, \beta, \alpha), (\beta, \alpha, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$ ■

Dintre proprietățile determinanților am folosit:

- dacă la o linie adunăm altă linie înmulțită cu un scalar determinantul rămâne neschimbat
- dacă schimbăm două linii între ele se schimbă semnul determinantului
- $\det A = \det A^t$

Temă: Pentru ce valori ale lui a sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$ are o infinitate de soluții?

An (4) Aflați numărul soluțiilor reale ale ecuației

$x^2 - 4mx + 4 = 0$. Discuție după m.

$\Delta = (-4m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 4^2(m^2-1)$

m		-1		1	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$
Nr. sol	2	1	0	1	2

adică: dacă $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ec. are două soluții reale

dacă $\Delta = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 1\}$ ec. are o soluție reală

dacă $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (-1, 1)$ ec. NU are soluții reale

(dar are două imaginare).

$\boxed{\text{temă:}}$ Aflați numărul soluțiilor reale ale ecuației

$x^3 - x^2 + m = 0$ pentru: a) $m = 0$; b) $m = 1$