

Sectiunea 23. Structuri algebrice.

Exersare: Filiera teoretica, profil real, specializarea stiinte ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acorda 10 puncte din oficiu.
- Pentru fiecare subpunct rezolvat integral se acorda 10 puncte.
- Timpul de lucru efectiv este de 90 minute.

1. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativa $x \circ y = 8xy + x + y$.

(a) Aratati ca $x \circ y = 8\left(x + \frac{1}{8}\right)\left(y + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x si y .

(b) Determinati numerele reale x , pentru care $x \circ x = 1$.

(c) Se considera functia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 8x + 1$. Demonstrati ca $f(x \circ y \circ z) = f(x) \cdot f(y) \cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y si z .

2. Pe multimea $M = (0, +\infty)$ se defineste legea de compozitie $x * y = x^{2 \log_3 y}$.

(a) Aratati ca $2 * 9 = 16$.

(b) Determinati numarul real x , $x \in M$ pentru care $x * 3 = 25$.

(c) Demonstrati ca legea de compozitie "*" este comutativa.

3. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativa $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$.

(a) Aratati ca $x \circ y = (x + 7)(y + 7) - 7$, pentru orice numere reale x si y .

(b) Determinati numerele reale x , pentru care $x \circ x = x$.

(c) Determinati numarul real a , stiind ca $(2019^a) \circ (-6) = 1$.

Sectiunea 23. Structuri algebrice.

Aprofundare: *Filiera teoretica, profilul real, specializarea matematica-informatica*
Filiera vocationala, profilul militar, specializarea matematica-informatica

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acorda 10 puncte din oficiu.
- Pentru fiecare subpunct rezolvat integral se acorda 10 puncte.
- Timpul de lucru efectiv este de 90 minute.

1. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativa

$$x \circ y = 4xy + 3x + 3y + \frac{3}{2}.$$

(a) Aratati ca $x \circ y = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(y + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x si y .

(b) Determinati numarul real x , pentru care $x \circ x \circ x = \frac{-1}{2}$.

(c) Se considera functia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ae^x - \frac{3}{4}$. Deeterminati numerele reale a , pentru care $f(x) \circ f(y) = f(x + y)$, pentru orice numere reale x si y .

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativa

$$x \circ y = 7xy + 7x + 7y + 6.$$

(a) Aratati ca $x \circ y = 7(x + 1)(y + 1) - 1$, pentru orice numere reale x si y .

(b) Determinati numerele reale x , pentru care $x \circ x \circ x = x$.

(c) Demonstrati ca, daca a, b si c sunt numere naturale astfel incat $a \circ b \circ c = 48$, atunci numerele a, b si c sunt egale.

3. Se considera corpun $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ si $H = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_7\}$.

(a) Sa se arate ca $H = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{4}\}$.

(b) Sa se arate ca, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$ exista $x, y \in \mathbb{Z}_7$ astfel incat $a = x^2 + y^2$.

(c) Sa se arate ca $\{x^{2000} \mid x \in \mathbb{Z}_7\} = H$.