Sectiunea 22. Integrala definita.

Exersare: ***Filiera teoretica, profil real, specializarea stiinte ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acorda 10 puncte din oficiu.**
- **Pentru fiecare subpunct rezolvat integral se acorda 10 puncte.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 90 minute.**

1. Se considera functia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$.

   (a) Aratati ca $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\ dx = \frac{1}{2}$.

   (b) Aratati ca $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\ dx = 1$.

   (c) Determinati volumul corpului obtinut prin rotatia in jurul axei Ox a graficului functiei $g : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = f(x)$.

2. Se considera functia $f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x+1}$.

   (a) Aratati ca $\displaystyle\int_0^{2} (x+1)f(x)\ dx = 22$.

   (b) Calculati $\displaystyle\int_0^{1} \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right) e^{x^3}\ dx = 1$.

   (c) Determinati numarul natural nenul n, stiind ca volumul corpului obtinut prin rotatia in jurul axei Ox a graficului functiei $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - 3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

3. Se considera functia $f : [2\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x\sqrt{x-2}$.

   (a) Aratati ca $\displaystyle\int_2^{3} f(x)\sqrt{x-2}\ dx = \frac{4}{3}$.

   (b) Aratati ca volumul corpului obtinut prin rotatia in jurul axei Ox a graficului functiei $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{f(x+2)}{x+2}\sqrt{e^x}$ este egal cu π.

   (c) Calculati $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_3^{x} f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\ dt}{x^2}$.

Sectiunea 22. Integrala definita.

Aprofundare: ***Filiera teoretica, profilul real, specializarea matematica-informatica***
Filiera vocationala, profilul militar, specializarea matematica-informatica

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acorda 10 puncte din oficiu.**
- **Pentru fiecare subpunct rezolvat integral se acorda 10 puncte.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 90 minute.**

1. Se considera functia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = xe^x$.

   (a) Aratati ca $\displaystyle\int_0^3 \frac{xf(x)}{e^x}\, dx = 9$.

   (b) Demonstrati ca orice primitiva a functiei f are un singur punct de inflexiune.

   (c) Determinati numarul natural nenul n, pentru care suprafata plana delimitata de graficul functiei f, axa Ox si dreptele de ecuatii $x = 0$ si $x = n$ are aria egala cu 1.

2. Pentru fiecare numar natural nenul n, se considera numarul $I_n = \displaystyle\int_1^e x \ln^n x\, dx$

   (a) Aratati ca $\displaystyle\int_1^e x\, dx = \frac{e^2 - 1}{2}$.

   (b) Demonstrati ca $I_{n+1} \geq I_n$, pentru orice numar natural nenul n.

   (c) Demonstrati ca $2I_{n+1} + (n + 1)I_n = e^2$, pentru orice numar natural nenul n.

3. Pentru fiecare numar natural nenul n, se considera numarul $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 2x + 2}\, dx$

   (a) Calculati $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 2x + 2)\, dx$.

   (b) Demonstrati ca $I_{n+1} + 2I_n + 2I_{n-1} = \dfrac{1}{n}$, pentru orice numar natural nenul n, $n \geq 2$.

   (c) Demonstrati ca $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} nI_n = \frac{1}{5}$.