Sectiunea 17. Elemente de analiza matematica. Derivabilitate.

Exersare*:** ***Filiera teoretica, profil real, specializarea stiinte ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acorda 10 puncte din oficiu.**
- **Pentru fiecare subpunct rezolvat integral se acorda 10 puncte.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 90 minute.**

1. Se considera functia $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3\ln x$.
   (a) Aratati ca $f'(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3},\ x \in (0, \infty)$.
   (b) Demonstrati ca $f(x) \geq 1,\ \forall x \in (0, \infty)$.
   (c) Demonstrati ca $f(\sqrt{2}) \leq f(\sqrt[3]{3})$.

2. Se considera functia $f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2}$.
   (a) Aratati ca $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2},\ x \in (-1, \infty)$.
   (b) Determinati imaginea functiei f.
   (c) Determinati ecuatia tangentei la reprezentarea graficului functiei f in punctul de abscisa $x_0 = 0$.

3. Se considera functia $f : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.
   (a) Aratati ca $f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2},\ x \in (1, \infty)$.
   (b) Determinati intervalele de monotonie ale functiei f.
   (c) Demonstrati ca $e^{x-2} - x + 1 \geq 0,\ \forall x \in (1, \infty)$

Sectiunea 17. Elemente de analiza matematica. Derivabilitate.

Aprofundare: ***Filiera teoretica, profilul real, specializarea matematica-informatica***
Filiera vocationala, profilul militar, specializarea matematica-informatica

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acorda 10 puncte din oficiu.**
- **Pentru fiecare subpunct rezolvat integral se acorda 10 puncte.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 90 minute.**

1. Se considera functia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)e^x + 1$.
   (a) Aratati ca $f'(x) = xe^x$.
   (b) Demonstrati ca $\sqrt[n]{e} \leq \dfrac{n}{n-1}$.
   (c) Demonstrati ca $f\left(\dfrac{2}{3}\right) \leq f\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

2. Se considera functia $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$.
   (a) Aratati ca $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2},\ x \in (0,\infty)$.
   (b) Determinati ecuatia tangentei la reprezentarea graficului functiei f in punctul de abscisa x_0, stiind ca tangenta este paralela cu Ox.
   (c) Demonstrati ca $\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} \leq 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ \forall x \in (0,\infty)$

3. Se considera functia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^{2020} + 2020x + 2$.
   (a) Aratati ca $f'(x) = 2020(x^{2019} + 1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Demonstrati ca ecuatia $f(x) = 0$ are exact doua solutii reale distincte.
   (c) Demonstrati ca functia f este convexa pe $\mathbb{R}$.