Secțiunea 9 - Funcții numerice. Proprietăți II

Exersare of: 10p

Partea I

1.

x	1	2	3
$f(x)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$

2 moduri deoarece $f(3) \in \{1,2,3,4\} \setminus \{f(1), f(2)\}$ 2p

3 moduri deoarece $f(2) \neq f(1)$ 2p

4 moduri : $f(1) \in \{1,2,3,4\}$ 2p $\Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ funcții 4p

2. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$ 2p $\Leftrightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$ 2p $\Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3$ 2p $\Leftrightarrow x_1 = x_2$ 2p

$\Rightarrow f$ injectivă 2p

3.

x		$x_v = -\frac{1}{2}$	
x^2+x	$\searrow$	y_v	$\nearrow$

$\Rightarrow x^2 + x \nearrow$ pe $[-\frac{1}{2}, \infty)$ 2p $\Rightarrow f \nearrow$ pe $[1, 2]$ 2p $\Rightarrow$

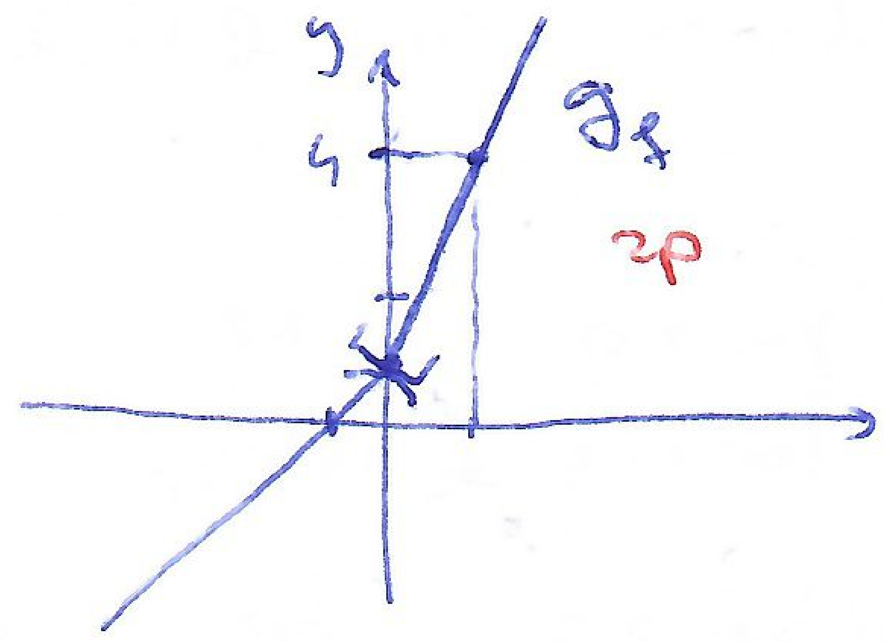
$\Rightarrow \operatorname{Im} f = [f(1), f(2)]$ 2p $\Rightarrow a = f(1) = 2$ 2p și $b = f(2) = 6$ 2p

Partea a II-a

1. a)

x	-1	0	1	
$x+1$	0	$1]$	////	2p
$3x+1$	////	$1($	4	2p

$\Rightarrow$



2p

$\Rightarrow$ orice paralelă la Ox taie G_f într-un UNIC PUNCT 2p $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ bijectivă 2p

b) Fie $y \in \mathbb{R}$. Rezolvăm ecuația $f(x) = y$ 1p

(I) dacă $x \leq 0$ ec. devine $x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1$ soluție $\Leftrightarrow y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 1$ 2p

(II) dacă $x > 0$ ec devine $3x + 1 = y \Rightarrow x = \frac{y-1}{3}$ soluție $\Leftrightarrow \frac{y-1}{3} > 0 \Leftrightarrow y > 1$ 2p

Așadar ecuația $f(x) = y$ are soluție unică $x = \begin{cases} y-1, & \text{dacă } y \leq 1 \\ \frac{y-1}{3}, & \text{dacă } y > 1 \end{cases}$ 1p

$\Rightarrow f$ bijectivă (METODA II pt a) :)) $\Rightarrow f$ inversabilă 2p

În plus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} y-1, & y \leq 1 \\ \frac{y-1}{3}, & y > 1 \end{cases}$ 2p

2. a)

x	0		$\frac{3}{2} = x_v$		3
$x^2 - 3x$	$\cancel{f(0)}$	$\searrow$	y_v	$\nearrow$	$\cancel{f(3)}$

2p

Cum $\frac{3}{2} - 0 = 3 - \frac{3}{2} \Rightarrow f(0) = f(3) = 0$ 2p $\Rightarrow \operatorname{Im} f = [y_v, 0]$ 2p / f surjectivă $\Rightarrow \begin{cases} a = y_v = -\frac{9}{4} & 2p \\ b = 0 & 2p \end{cases}$

b) Deoarece $f(0) = f(3)$ 5p $\Rightarrow \nexists\ a, b$ a.î. f injectivă 5p

3. a) Fie $y \in \mathbb{R}$. $f(x) = y$ 2p $\Leftrightarrow 2x - 1 = y$ 2p $\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2} \in \mathbb{R}$ soluție unică 2p $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ bijectivă 4p

b) Din a) $\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă, 2p

În plus, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2p, $f(y) = \frac{y+1}{2}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ 6p

Secțiunea 9 - Funcții numerice. Proprietăți II

Aprofundare Of: 10p

Partea I

1. $f:\{1,2,3\} \to \{2,3,4\}$ injectivă $\Rightarrow |Im\, f| = 3$ 2p $\Rightarrow Im\, f = \{2,3,4\}$ 2p $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(1)+f(2)+f(3) = 2+3+4 = 9$ 6p

2. $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ 2p

$0, -1$ egal depărtate de $-\frac{1}{2}$ $\Bigg| \Rightarrow f(0) = f(-1)$ 2p $\Rightarrow f$ nu este injectivă 6p

3. Fie $y \in (1,3)$. Rezolv $f(x) = y$ pt $x \in (0,\infty)$ 1p

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} = y$ 2p $\Leftrightarrow x+3 = yx+y \Leftrightarrow x\underbrace{(y-1)}_{\neq 0} = 3-y$ 2p $\Leftrightarrow x = \frac{3-y}{y-1}$ 1p

$\frac{3-y}{y-1}$ este soluție $\Leftrightarrow \frac{3-y}{y-1} > 0$ 1p $\Leftrightarrow \frac{y-3}{y-1} < 0 \Leftrightarrow y \in (1,3)$ adevărat 1p

Așadar $\forall y \in (1,3)$ ecuația $f(x) = y$ are o unică soluție

$x = \frac{3-y}{y-1} \in (0,\infty) \Rightarrow f$ bijectivă. 2p

Partea a II-a

1. a) f injectivă $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m\cdot 1 - 3 \leq 1+1 \end{cases}$ 2p 2p $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq 5 \end{cases}$ 2p $\Leftrightarrow m \in (0,5]$ 4p

b) f surjectivă $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m\cdot 1 - 3 \geq 1+1 \end{cases}$ 2p 2p $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \geq 5 \end{cases}$ 2p $\Leftrightarrow m \in [5,\infty)$ 4p

2. a) Fie $w \in \mathbb{C}$

$f(z) = w$ 2p $\Leftrightarrow i\bar{z} = w$ 2p $\Leftrightarrow \bar{z} = \frac{w}{i} = -wi$ 2p $\Leftrightarrow z = \overline{-wi} = \bar{w} i$ 2p $\in \mathbb{C}$ soluție unică

$\Rightarrow f$ bijectivă. 2p

b) $f(ki) = i \cdot \overline{ki} = i(-ki) = -i^2 k = k$ 4p $\Rightarrow$

$\Rightarrow S = \sum_{k=1}^{2019} f(ki) = \sum_{k=1}^{2019} k$ 2p $= \frac{k\cdot(k+1)}{2} = 2019 \cdot 1010$ 2p $= 2019000 + 20190 = 2039190$ 2p

3. a) Fie $y \in (0,\infty)$

$f(x) = y \Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = e^y$ 1p $\Leftrightarrow x(e^y - 1) = 1 + e^y$ 1p $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1+e^y}{e^y-1}$ soluție 2p $\Leftrightarrow \frac{1+e^y}{e^y-1} > 1 \Leftrightarrow 1+e^y > e^y - 1 \Leftrightarrow 1 > -1$ 2p Adevărat

Așadar $\forall y \in (0,\infty)$ $f(x) = y$ are o unică soluție $x = \frac{1+e^y}{e^y-1} \in (1,\infty)$ 2p

$\Rightarrow f$ bijectivă 2p

b) Din a) $\Rightarrow f$ inversabilă 2p și $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2p, $f^{-1}(y) = \frac{1+e^y}{e^y-1}$ $\forall y > 0$ 6p