

Propunere 1: $f = x^4 + x^3 - 2x + 1 \in \mathbb{R}[x]$

a) restul împărțirii la $g = x^2 - x$

b) restul împărțirii la $h = (x-1)^2$

Sol:

a) $\text{grad } g = 2 \xrightarrow{\text{Th. \u00c7. 1.1.}} \exists c, r \in \mathbb{R}[x], \text{grad } r < 2$

a.i. $f = g \cdot c + r(x)$

$\text{grad } r < 2 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ a.i. $g = ax + b$

Asadar $f = (x^2 - x) \cdot c(x) + ax + b$

$x^2 - x = 0 < \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$

\Rightarrow pt $x = 0$ $f(0) = 0 \cdot c(0) + b$
 pt $x = 1$ $f(1) = 0 \cdot c(1) + a + b$

$\Rightarrow \begin{cases} b = f(0) \\ a + b = f(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = f(0) \\ a = f(1) - f(0) \end{cases}$

$f(0) = 1$
 $f(1) = 1 + 1 - 2 + 1$

$\Rightarrow a = 0, b = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow r(x) = 1$

b) Ca mai sus $f = (x-1)^2 \cdot c(x) + ax + b$ \otimes
 $\text{grad } < \text{grad } (x-1)^2 = 2$

$(x-1)^2 = 0$ are r\u00e2d\u00e1cin\u0103 dubl\u0103 $x_1 = x_2 = 1$

pt $x = 1$ \otimes $f(1) = 0 \cdot c(1) + a + b \Rightarrow a + b = f(1)$

Derivand formal $\otimes \Rightarrow f' = 2(x-1)c(x) + (x-1)^2 c'(x) + a$

pt $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \cdot c(1) + 0 \cdot c'(1) + a = a = f'(1)$

$f' = 4x^3 + 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 5 \Rightarrow a = 5$
 $f(1) = 1 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow r(x) = 5x - 4$

Propunere 2: $f = x^4 + ax^3 - ax - 4, g = x + a$

\exists afl\u0103m $a \in \mathbb{R}$, dac\u0103

a) restul \u00e2mp\u00e2r\u0219irii lui f la $x + a$ este 5

b) $f : g$

Sol:

a) Din Teorema restului \Rightarrow restul \u00e2mp\u00e2r\u0219irii lui f la $x + a$ este $r = f(-a) =$

$= f(-a) = 5$

Dar $f(-a) = (-a)^4 + a \cdot (-a)^3 - a \cdot (-a) - 4 = a^2 - 4$

$\Rightarrow a^2 - 4 = 5 \Rightarrow a \in \{\pm 3\}$

b) $f : (x+a) \xrightarrow{\text{Th. Bezant}} f(-a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow a \in \{\pm 2\}$

Propunere 3: $f = x^3 - ax^2 + x - a \in \mathbb{R}[x]$

Nu exist\u0103 $a \in \mathbb{R}$ a.i. $(x^2 - 1) \mid f$

Sol:

$x^2 - 1 = 0 < \pm 1 \Rightarrow (x^2 - 1) = (x-1)(x+1) \otimes$

Presupunem prin absurd c\u0103 exist\u0103 $a \in \mathbb{R}$ a.i.

$f : (x^2 - 1) \otimes \Rightarrow \begin{cases} f : (x-1) \Rightarrow f(1) = 0 \\ f : (x+1) \Rightarrow f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 - a + 1 - a = 0 \\ -1 - a - 1 - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2a = 0 \\ -2 - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 = -2$ fals

\Rightarrow presupunerea este fals\u0103 \Rightarrow

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} (x^2 - 1) \nmid f$